Astron.

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

LA QUESTION DES PETITES PLANÈTES,

PAR M. J. MASCART.

915.19
111 9108.

INTRODUCTION.

Si l'on considère les planètes connues des Anciens, la succession des valeurs de leurs grands axes présente une certaine régularité qu'il est facile de mettre en lumière par le tracé d'une courbe continue; cependant il existe une singularité, et, si l'on imagine la présence d'un corps intermédiaire, si l'on recule d'un rang la place de Jupiter, cette courbe représentative prend une allure plus régulière. Soucieux seulement de cette plus grande harmonie, Képler n'avait pas hésité à affirmer la présence d'une planète entre Mars et Jupiter.

Longtemps après, Titius formule une loi pour représenter la distance moyenne d'une planète au Soleil, connue sous le nom de *loi de Bode :* elle assigne 2,8 pour distance de l'astre hypothétique. W. Herschel découvre bientôt Uranus, qui vérifie le terme suivant de la loi de Bode : aussi de Zach et Lalande proposent-ils un examen systématique du zodiaque pour élucider la question de cet astre plus proche et inconnu, et, sur ces entrefaites, Piazzi aperçoit Cérès qui circule à la distance 2,8 du Soleil. Galle, enfin, observe Neptune, contrôlant un peu moins bien cette fois le terme qui suit Uranus dans la formule de Titius.

Cérès avait été perdue de vue, mais Olbers la retrouve, et découvre encore Pallas à cette même distance de 2,8 : et il imagine alors que ce n'étaient que des fragments d'une planète plus grosse, émiettée par une éruption interne. Cette hypothèse est justement célèbre par sa fécondité, par les découvertes et les importants travaux qu'elle suscita : en surveillant les environs des points de rupture possible, Harding et Olbers aperçoivent deux astres nouveaux, Junon et Vesta, en 1804 et 1807. Puis un temps d'arrêt, jusqu'aux découvertes d'Astrée et de Hébé, en 1845 et 1847, par Hencke.

A partir de ce moment, les découvertes vont se précipiter, et la recherche de nouvelles planètes devient l'objet des efforts d'un grand nombre d'astronomes distingués, d'amateurs infatigables : parmi ceux qui se spécialisèrent le plus fructueusement dans ces travaux on trouve Hind, de Gasparis, Luther, Goldschmidt, Chacornac, Tempel, C.-H.-F. Peters, Watson, Borrelly, les Henry, Palisa, Perrotin, Charlois, Max Wolf, etc. On ne peut songer à observer les diamètres apparents, et c'est par leur mouvement propre qu'il faut déceler la présence de ces corpuscules; et, si le nombre des astéroïdes augmente très rapidement, leur éclat moyen ne dépasse plus guère la 13^{e} grandeur : bientôt, enfin, on substitue la recherche systématique par la Photographie à l'exploration visuelle, malaisée et de faible rendement.

Si l'on pense qu'il existe déjà plus de 500 astéroïdes, on verra la somme considérable de travail, de patience, d'application à laquelle correspond leur recherche, leur découverte, leur observation courante, la détermination précise de leurs positions aux instruments méridiens, le calcul de leurs orbites et éphémérides, la détermination des perturbations et les recherches théoriques qu'elles engendrent. Mais, si les découvertes se précipitent, si le nombre de ces astres augmente très vite, si l'anneau s'enrichit rapidement, sa masse même ne va-t-elle pas jouer aussi un rôle important dans l'équilibre du système solaire?

C'est ce que nous allons voir.

ÉCLATS MOYENS.

Le Verrier s'inquiète bientôt de l'augmentation incessante de cet anneau et se préoccupe de sa masse possible : or, en comparant les Tables de Mars aux observations, on peut conclure que cette masse ne saurait surpasser le quart de celle de la Terre sans présenter sur Mars des perturbations inexplicables; et, de ce fait, la question de l'anneau entre dans une nouvelle phase très importante. Mais, si la théorie indique une limite supérieure à la masse totale de ces corpuscules, il faut avant tout, pour trancher la question, lever l'incertitude suivante : dans quelle mesure peut-on, et doit-on, supposer que les découvertes récentes enrichissent l'anneau?

Si, précisément, on utilise les clichés photographiques qui entraînent la connaissance des objets nouveaux et que l'on compare les diverses épreuves obtenues jusqu'ici, on peut, avec H. Poincaré, rechercher la probabilité pour qu'une trace nouvelle corresponde à une planète encore inconnue; et, en se bornant à la 12^{e} grandeur, il apparaît alors comme très probable que le nombre total de ces petits astres ne puisse dépasser un millier. Recherchons donc des

approximations de la masse individuelle de l'un d'eux, pour vérifier que la masse totale reste bien au-dessous de sa limite théorique.

Les premières mesures photométriques effectuées étaient très délicates, parce que, précisément pour les premières de ces planètes et les plus brillantes, Junon, Cérès, Vesta, etc., l'éclat présente de rapides variations : Olbers lui-même, comme cela résulte de sa correspondance avec Gauss, s'était soigneusement attaché aux variations d'éclat qu'il avait constatées pour Cérès, Pallas et Junon. Et, loin d'éclaircir la situation, ces recherches ne firent que raffermir deux opinions très différentes : ceux qui, d'une part, tenaient pour l'hypothèse fragmentaire, avec Olbers et de Litrow, y voyaient une éclatante confirmation, puisque ces variations résultaient très simplement des irrégularités formelles de fragments ayant une ou plusieurs origines communes; d'autres expliquaient les changements d'éclat avec la plus grande sagacité, en admettant la présence de diverses faces, ou de diverses régions superficielles réfléchissant inégalement la lumière.

En fait, les deux partis avaient partiellement raison, et ce mode d'observation, sous cette forme du moins, ne tarda pas à devenir stérile : nonobstant d'importantes études sur les variations d'éclat, Goldschmidt ne put en déduire les durées des rotations de ces corps sur eux-mêmes et, malgré les intéressantes recherches de Schrœter, Vogel, etc., on ne sait actuellement rien de précis sur leurs atmosphères et leurs rotations.

Quelques astronomes plus audacieux tentent bien d'aborder le problème en face, et de mesurer les diamètres apparents, quels que soient la petitesse du disque et les effets d'irradiation : même avec les efforts d'excellents observateurs comme Schrœter, Herschel, Mädler, Lamont, etc., les résultats de cette tentative sont loin d'être satisfaisants et, en désespoir de cause, on renonce à ce procédé pour adopter la méthode indirecte de Stampfer, basée sur les éclats moyens. Le diamètre d, en milles géographiques allemands (1 mille $= 7^{km},5$), résulte alors de la formule

$$\log d = 2,51312 - 0,20412\,\mathrm{M} + \log a(a-1),$$

dans laquelle M est l'éclat moyen, et a la distance moyenne de la planète au Soleil.

Mais tous les procédés d'observation et de mesure vont se développer en puissance et en précision : bientôt les diamètres apparents seront mesurés directement, et la formule de Stampfer ne sera plus utilisée que pour les astéroïdes inaccessibles aux procédés directs. C'est ce que nous verrons dans un instant, car, pour le moment, nous devons indiquer les progrès effectués, parallèlement, dans l'art de la Photométrie.

Au reste, si l'on veut effectuer des mesures photométriques précises, il faut tenir compte de *la phase* dans le calcul de la quantité de lumière réfléchie : cette difficulté, elle-même, joue un rôle prépondérant dans toutes les théories de la lumière zodiacale. Tout d'abord, on ne sait rien de précis sur la forme des corpuscules météoriques, et l'on ne saurait la supposer aussi régulière que celle des grosses planètes : c'est donc déjà une approximation que de considérer, sur le grand nombre, la forme globulaire comme une forme moyenne. Puis, l'effet de la phase d'une sphère illuminée n'est qu'imparfaitement connu, bien qu'il ait paru fort légitime, pendant longtemps, d'accepter la loi de Lambert exprimée par la fonction $\sin\alpha - \alpha\cos\alpha$, en appelant α l'angle extérieur au corps illuminé dans le triangle qu'il forme avec le Soleil et la Terre : ce qui revient à dire que la quantité de lumière réfléchie, par diffusion, est proportionnelle au produit des cosinus des angles d'incidence et d'émanation.

Si cette loi fondamentale de la photométrie semblait la plus rationnelle, elle a suscité, depuis, bien des recherches, et Seeliger a définitivement montré qu'elle est inapplicable, et que les résultats sont très distincts suivant que les deux rayons (incident et émanant) sont de même côté, ou de part et d'autre, par rapport à la normale à la surface.

Comment donc remplacer la loi de Lambert?

Müller et Parkhurst, par leurs mesures photométriques des petites planètes, avaient déjà montré que l'accroissement d'éclat vers l'apparition est beaucoup plus rapide qu'il ne le devrait suivant la loi de Lambert; ils proposent des termes correctifs et établissent, expérimentalement, que la variation d'éclat est en moyenne de 0,03 grandeur stellaire par un accroissement de 1° dans l'angle α lors des grandes élongations : cette modification est considérable, on le voit, puisqu'elle peut altérer la grandeur d'une unité entre 150° et 180°. Puis Seeliger propose de remplacer la loi de Lambert par le produit des deux cosinus divisé par leur somme. Enfin, Searle utilise tous les documents très importants fournis par les petites planètes : il introduit des combinaisons de termes correctifs de la forme $1 - \cos\alpha$, α, α^2, et, quoiqu'il y ait là un peu d'arbitraire, il parvient par ce procédé, mieux que par toutes les fonctions théoriques connues, à faire entièrement cadrer toutes les mesures photométriques relatives à ces corpuscules.

En même temps, les procédés photométriques se perfectionnent : les premières singularités observées dans les éclats, si favorables à l'hypothèse de fragments irréguliers, ne supportent pas l'examen attentif, et il devient plus difficile d'affirmer la variabilité de l'éclat des astéroïdes.

Puis Parkhurst réunit et discute soigneusement ses nombreuses observations photométriques sur les petites planètes, et l'accord des résultats est remarquable,

les observations d'éclat en fonction de la phase concordent avec les résultats de Müller, à Potsdam : il n'existe pas de variations apparentes dues aux mouvements de rotation, comme on l'avait tout d'abord soupçonné, et l'on peut même en conclure que les astéroïdes serviront utilement pour comparer les grandeurs des étoiles faibles.

Une seule des petites planètes, (345) Tercidina, parmi celles qui furent étudiées avec soin, pourrait peut-être laisser encore des doutes en ce qui concerne les variations d'éclats, suivant les travaux de M. Wolf, Wendell, Hartmann, etc.

La Photométrie allait encore mettre en relief un résultat très important.

La lumière émise par un astre, non lumineux en soi, est polarisée, ce qui constitue un caractère distinctif de la lumière réfléchie; et si, par exemple, on étudie l'éclat réel de la pleine Lune, on observe qu'il est le même que celui de la lumière réfléchie par les roches terrestres. De telle façon que, si l'on donne le nom d'*albedo* à la proportion de lumière incidente réfléchie d'une manière diffuse par une surface, on trouve 0,17 pour valeur de l'albedo lunaire, et 0,16 pour celui de la terre argileuse. Ces nombres, en quelque sorte, ne sont-ils pas caractéristiques de l'état moyen d'une surface?

Quels sont donc les pouvoirs réfléchissants des petites planètes?

En prenant la réflexion de la surface de Mars pour unité, on trouve les pouvoirs suivants :

	Mars.....	1,00	
Vesta.....	2,77	Pallas.....	0,88
Junon.....	1,67	Cérès.....	0,67

Les *albedo* des petites planètes sont donc extrêmement différents, et l'on rencontre de pareils écarts dans le système des satellites de Jupiter.

On voit suffisamment, par ces rapides indications, l'importance des questions soulevées par les astéroïdes et l'intérêt des résultats : nous allons trouver encore de précieux enseignements dans la mesure des diamètres apparents.

DIAMÈTRES APPARENTS.

Avant d'établir les dimensions des petites planètes nous allons montrer, en quelques mots, la difficulté d'un pareil problème de mesure directe, avec les erreurs d'irradiation et celles qui peuvent provenir d'un aplatissement sensible : pour cela, il n'y a qu'à suivre les importantes recherches de See, qui s'est activement préoccupé d'obtenir les diamètres des systèmes de Mars, Jupiter et Saturne, ainsi que des mesures d'irradiation et d'aplatissement.

Les mesures micrométriques assignent 9″,68 pour valeur du diamètre équatorial de Mars, tandis que les mesures héliométriques donnent 9″,34 : d'ailleurs, mesurée directement par l'observation du diamètre des fils éclairés, l'irradiation a pour valeur 0″,76, soit 0″,38 à la distance 1; la mesure micrométrique se réduirait ainsi à 9″,30 et la concordance est très satisfaisante. D'autre part, le diamètre polaire indique la valeur 9″,22, ce qui fournit un aplatissement de $\frac{1}{200}$ environ.

Si l'on observe Jupiter le jour, un peu avant ou un peu après le coucher du Soleil, on trouve pour diamètre 37″,646, ce qui correspond à 141950^{km}; la nuit, on trouve 38″,41. L'irradiation s'élève donc encore à 0″,76, ou 0″,38 pour chaque bord: ici, l'on peut rappeler que les mesures héliométriques fournissent 37″,34, et que Bessel avait trouvé 37″,60.

Pour Vénus, on obtient 17″,14 et 17″,39 entre le jour et la nuit — soit une irradiation de 0″,25.

Pour Saturne, on a 17″,24 le jour et 17″,80 la nuit, avec une irradiation de 0″,56; la moyenne des mesures micrométriques, 17″,77, peut être comparée au résultat de Bessel qui indiquait 17″,05.

Pour Uranus, 3″,07 et 3″,46 donnent une irradiation de 0″,39, et le diamètre perpendiculaire ayant fourni 3″,40 semble indiquer un aplatissement de $\frac{1}{57}$ environ.

Ainsi, d'une part, l'appréciation micrométrique des petits diamètres, qui était insurmontable avec les instruments ordinaires, va devenir suffisamment exacte avec les grands réfracteurs; mais, d'autre part, le problème est très délicat, il exige des précautions et des soins multiples si l'on veut sortir de l'ordre de grandeur, seulement, pour préciser les valeurs numériques. Nous avons vu échouer d'excellents observateurs comme Schrœter, Herschel, Mädler, Lamont, etc., là où leurs successeurs seront plus heureux, grâce à leur supériorité instrumentale — et les résultats comparatifs que nous allons indiquer ne manqueront certainement pas d'être instructifs.

Barnard s'est particulièrement distingué dans ces recherches délicates, à Lick avec un réfracteur de 36 pouces, à Yerkes avec un 40 pouces, sous des grossissements de 1000 environ.

Voici un résumé de quelques résultats importants, réduits à l'unité de distance :

① Cérès.	Diamètre.	① Cérès.	Diamètre.
1802. W. Herschel	0,127	1894. Barnard	1,330 ± 0,064
1805. Schrœter	1,259	1896. »	1,08
1839. Galle	0,32	1902. »	1,06
1866. Knott	0,510		

(2) PALLAS.

		Diamètre.
1805.	Schrœter	1,626
1807.	W. Herschel	0,09
1837.	Lamont	0,26
1894.	Barnard	0,605 ± 0,026
1896.	»	0,68
1902.	»	0,68

(3) JUNON.

		Diamètre.
1805.	Schrœter	1,144
1896.	Barnard	0,26
1902.	Barnard	0,27

(4) VESTA.

		Diamètre.
1816.	Schrœter	0,313
1847.	Mädler	0,272
1855.	Secchi	0,428
1881.	Tacchini	0,830
1881.	Millosevich	0,597
1894.	Barnard	0,527 ± 0,033
1896.	»	0,54
1902.	»	0,53

Ces nombres sont rapportés à l'unité de distance et les dernières séries de mesures offrent un accord remarquable, car il ne faut pas oublier que le problème présente des difficultés considérables qui le rendent certainement plus délicat, par exemple, que la mesure du diamètre des satellites de Jupiter.

Il va être aisé d'en déduire les diamètres : Argelander les déduit des éclats; Stone également, sauf qu'il utilise les mesures de Cérès par Herschel, et de Pallas par Lamont; Barnard, enfin, donne des diamètres immédiatement observés :

	Argelander.	Stone (1867).	Barnard (1894).
(1) Cérès	370 kilom.	315 kilom.	964 kilom. ± 47
(2) Pallas	261 »	275 »	440 » ± 19
(3) Junon	174 »	200 »	
(4) Vesta	443 »	345 »	382 » ± 24

Nous touchons à un point très important dans l'histoire de ces astéroïdes : Vesta, considérée jusque-là comme la plus grosse de ces planètes secondaires, cesse de garder ce rang privilégié et se voit dépassée par Pallas et, de beaucoup, par Cérès. En effet, c'est que la méthode micrométrique, si malaisée qu'elle ait été, se trouve la seule *absolue*, et la méthode photométrique reposait sur une égalité hypothétique des pouvoirs réfléchissants; or, précisément, si l'on compare les dimensions aux évaluations photométriques, on a des données précises sur les pouvoirs réflecteurs, qui sont très variables : et Vesta, comme nous l'avons dit, ne l'emportait de beaucoup que grâce à son pouvoir réflecteur, puisqu'elle réfléchit quatre fois plus de lumière que Cérès.

Enfin, les planètes dont on peut mesurer, ou pressentir, le diamètre apparent

nous présentent des disques ronds dont la lumière semble uniforme : Pallas et Vesta sont jaunâtres, Cérès est blanchâtre; et rien, dans l'aspect, n'indique une atmosphère élevée, ou particulièrement dense.

MASSE TOTALE DE L'ANNEAU.

Nous avons donc vu Le Verrier demander que la masse totale de l'anneau des astéroïdes ne surpassât point le quart de celle de la Terre; et, dès les déterminations assez grossières, on entrevoit que les plus grosses d'entre elles ne dépassent guère 250^{km} de diamètre, tandis que les plus petites atteignent environ 20^{km}. A ce compte, si l'on admet un diamètre moyen de 130^{km}, ce qui est sûrement exagéré, il en faudrait 250000 pour que leur somme pût atteindre la limite fixée par la théorie, à supposer toutefois qu'elles aient sensiblement même densité que notre planète.

Cette question de masse une fois posée, nous assistons à la convergence des efforts vers la connaissance des dimensions réelles des astéroïdes : et puisque la méthode photométrique laisse momentanément des déboires, la formule de Stampfer est adoptée, et utilement utilisée par Ferguson, Argelander, Niesten, etc. Le résultat vaut d'être mentionné : les diamètres, encore plus dissemblables qu'on ne pouvait l'imaginer, varient de 10^{km} à 400^{km}, le volume total est approximativement aujourd'hui de

$$2.10^{8} \text{ kilom.-cubes,}$$

par opposition à celui de la Terre,

$$10^{12} \text{ kilom.-cubes,}$$

et leur agglomération correspondrait à un astre unique de 800^{km} de diamètre — tous chiffres résultant de la même formule.

A masses comparables il faudrait encore 1200 à 1500 fois plus de petites planètes pour approcher le quart de la masse terrestre : vu les nombreuses acquisitions récentes, ce dernier rapport est moins déconcertant que le premier que nous ayons mentionné, mais nous avons vu que la probabilité d'une trace nouvelle sur un cliché photographique tend encore à prouver que cette limite est bien supérieure à la réalité.

D'ailleurs, une remarque nouvelle vient abonder dans le même sens : si l'on range les petites planètes par décades, la diminution corrélative dans la valeur moyenne des moyens mouvements, signalée par A. Berberich, reste très douteuse, tandis que l'on constate une diminution rapide dans leur éclat moyen; et si, à l'ordinaire, on jugeait que chaque grandeur stellaire correspond à un

ensemble de même masse, on voit au contraire ici qu'il existe à peu près le même nombre d'astéroïdes pour chaque grandeur, ce qui tend de nouveau à diminuer la masse totale présumée.

Néanmoins quelques astronomes, comme G. Ravené, se figurent encore que la masse totale de l'anneau est suffisante pour expliquer les 5″ du mouvement du périhélie de Mars : ceci équivaudrait à la prendre pour 30 fois supérieure à celle de la Lune, soit 0,4 de celle de la Terre, et la limite indiquée par Le Verrier serait même dépassée. Roszel, Harzer, Barnard, etc. combattent utilement cette opinion et, d'ailleurs, les mesures micrométriques tendent bien à prouver que cette masse n'équivaut guère à plus de $\frac{1}{10}$ de notre satellite.

Ainsi les doutes se dissipent peu à peu. Les déterminations photométriques exécutées pour avoir les diamètres sont d'abord malaisées, sinon très incertaines; et, qui plus est, elles ne constituent jamais qu'une méthode très indirecte basée sur l'hypothèse même que les surfaces réfléchissantes sont comparables. Le progrès s'effectue lentement, et les données certaines commencent avec les mesures micrométriques que permettent les grands instruments; les idées se modifient : telle planète, comme Vesta, au plus grand éclat intrinsèque, va céder le pas à un astre beaucoup plus important, comme Cérès; on apprend même que cette dernière a un diamètre de près de 1000^{km}, trois ou quatre fois supérieur au chiffre imaginé jusqu'alors; par répercussion, on connaît la grande variation dans les pouvoirs réflecteurs, etc.

Mais, si intéressantes que soient toutes ces conclusions, elles ne font qu'échanger des éléments, sans toucher en rien à l'ordre de grandeur assigné pour le volume de l'anneau des astéroïdes, non plus qu'à l'idée que nous pouvons nous former relativement à sa masse. La statistique des découvertes, le calcul des probabilités, etc., tous les arguments viennent nous confirmer que la question posée il y a cinquante ans est aujourd'hui résolue : la masse totale de l'anneau des petites planètes, non seulement n'atteindra pas le quart de la masse terrestre, mais restera bien loin de cette limite.

La seule restriction qui subsiste réside dans l'hypothèse, selon toutes probabilités, que la densité des astéroïdes est comparable à celles que nous connaissons par ailleurs. Pourrait-il en être autrement?

CONSTITUTION DE L'ANNEAU.

La loi de Bode dépend de trois paramètres arbitraires et il est aisé de construire des formules analogues, ou de types très voisins, pour représenter les distances

aux planètes principales des satellites de Saturne et de Jupiter et, par cela même, la loi de Titius peut être considérée comme intervenant directement dans les hypothèses cosmogoniques, en première approximation tout au moins, ou, si l'on veut, d'une manière osculatrice. Sans doute, aujourd'hui, on reproche communément aux lois de cette nature d'avoir un caractère exclusivement empirique et de ne préciser en rien les raisons de la formation planétaire : cette critique est évidemment très juste, mais il faut tenir compte, par ailleurs, de l'ignorance dans laquelle nous sommes des grands problèmes cosmiques et de leur complexité, en sorte qu'une règle quelconque, si empirique soit-elle, peut être néanmoins utile, et très curieuse, si elle représente l'expérience avec une certaine approximation. Au reste la nébuleuse primitive a passé par une région d'instabilité, en quelque sorte, dans sa condensation progressive, et l'anneau d'astéroïdes entre Mars et Jupiter tient lieu d'une planète plus importante qui n'a pu se constituer.

Quand Cérès eut été perdue de vue, Bode avait eu le temps de reconnaître que ce n'était pas une comète et, grâce aux admirables calculs de Gauss, Olbers put la retrouver le 1er janvier 1902; peu après il découvre Pallas et, remarquant que les deux planètes passent très sensiblement en deux mêmes points de l'intersection de leurs plans d'orbites, il émet l'hypothèse que nous avons mentionnée, féconde, et dont l'application fit trouver de nouveaux astéroïdes. Lagrange y applique le calcul et fonde sur cette hypothèse une théorie de la formation des comètes : en effet, dans de pareilles conditions, tous les fragments doivent repasser, à très peu près, par le point de rupture et son symétrique par rapport au Soleil, régions où sont précisément découvertes Junon et Vesta.

Ces quatre premiers astéroïdes ont des grandeurs stellaires variant de la sixième à la huitième; à peine si Vesta atteint la limite de visibilité à l'œil nu, et la grandeur apparente varie, bien entendu, suivant la position qu'occupe la planète dans son orbite. Astrée et Hébé ne sont déjà plus que de neuvième grandeur et, à partir de cette époque, les découvertes se succèdent régulièrement, jusqu'à l'anneau très riche que nous connaissons aujourd'hui : mais les éclats diminuent très rapidement et ces corpuscules constituent, véritablement, une poussière céleste.

Par ailleurs, les mesures photométriques sur les planètes sont assez délicates : elles ont fourni souvent des résultats contradictoires, ou des variations d'éclat rapides et inexplicables. Fallait-il l'attribuer à la présence de diverses faces réfléchissant inégalement la lumière? malgré l'impossibilité où s'est trouvé Goldschmidt d'en déduire les durées de leurs révolutions sur elles-mêmes. Ou bien

l'origine fragmentaire n'était-elle pas de ce fait plus plausible? en introduisant les irrégularités de forme avec Olbers et de Littrow.

L'hypothèse d'Olbers va subir un assaut, et les travaux de Mauvais, Gould, d'Arrest, Plana, etc., tendent à prouver que les différentes orbites ne présentent réellement pas de point d'intersection commun. Cependant, si cette hypothèse ne s'applique déjà plus à Astrée, on peut objecter qu'elle a été réalisée, en principe, et que le désaccord ultérieur résulte des perturbations de Jupiter, ou même de Saturne : le calcul montre à Newcomb qu'il n'en est rien et que l'idée d'Olbers doit être abandonnée aujourd'hui, en tant du moins qu'origine *commune* à tous ces astéroïdes.

Certainement, il y a un moyen propre à vérifier d'une manière définitive l'hypothèse d'Olbers : prendre toutes les orbites des planètes et les combiner deux à deux, chercher les points d'intersection, puis étudier analytiquement, même par des procédés assez approchés, si les astres correspondants ont pu se trouver en conjonction physique. A cet égard nous avons eu l'occasion de signaler ailleurs comment certaines planètes peuvent passer à des distances extrêmement faibles, cent fois plus petites que la distance de la Terre à la Lune : ce serait un choc absolu possible, si l'on négligeait les perturbations et les incertitudes dans les orbites. Mais, précisément, les perturbations s'introduisent, et elles sont d'autant plus délicates qu'il peut être indispensable de remonter fort longtemps en arrière pour obtenir une pareille singularité.

Le problème, cependant, est du plus haut intérêt au point de vue cosmogonique : puis, aussi, on pourrait avoir la chance de prévoir, à brève échéance, la rencontre de deux astéroïdes, et l'on serait en présence d'un des cas les plus curieux que puisse présenter le calcul des perturbations. Serait-on en face, par exemple, de la réalisation du mouvement prévu comme possible par M. Poincaré? celui de deux astres pivotant l'un autour de l'autre, puis s'abandonnant pour décrire des trajectoires elliptiques, se rencontrant et pivotant de nouveau, pour se quitter encore, et cela d'une manière périodique.

Malheureusement, ceux-là seuls qui se sont occupés de questions de ce genre savent combien sont longs et pénibles les travaux où il faut utiliser tant de matériaux, combien les statistiques et les calculs correspondants sont minutieux, parfois décourageants à cause du résultat incertain. En fait, quel que soit l'intérêt primordial qui s'attache à cette étude, aucun astronome ou calculateur infatigable ne s'est senti l'énergie nécessaire pour l'entreprendre et la mener à bien.

Pour notre part, nous avons du moins cherché si certains caractères ne pourraient pas conduire, sinon à une certitude, du moins à des indications, à des probabilités propres à infirmer ou à confirmer l'hypothèse d'Olbers. Dans ce but,

nous avons étudié de près l'espérance mathématique des coïncidences d'éléments, analogies curieuses sur lesquelles nous aurons à revenir, pour la comparer à la réalité; et nous avons trouvé que les écarts ne sont pas seulement imputables à l'arbitraire qui préside à la définition de cette espérance, et qu'ils tendent plutôt à confirmer l'hypothèse d'une action directrice extérieure. Or l'action la plus importante, *a priori*, doit être celle de Jupiter et, dans le cas où les perturbations de Jupiter renferment des parties séculaires, ce qui paraît devoir fréquemment se présenter, les coïncidences tendraient à disparaître : on est ainsi conduit, de nouveau, à considérer comme possibles, et même comme probables, des origines communes à plusieurs de ces astéroïdes.

Nous aurons bientôt l'occasion de revenir sur cette question à propos des coïncidences, mais déjà nous avions acquis la conviction que l'on peut répondre affirmativement à cette question si curieuse : existait-il, dès l'origine, des groupements assez importants d'astéroïdes qui, de même que dans le cas des étoiles filantes, se sont lentement disséminés sur toute la couronne?

Nous ne sommes pas encore bien avancés dans l'étude des petites planètes et, cependant, nous rencontrons sans cesse des difficultés pour trancher d'une manière définitive les questions en apparence les plus simples; en effet, non seulement l'étude de ces corpuscules a suscité les remarquables travaux de Cauchy, Hansen, Gylden, Tisserand, Perrotin, Harzer, Backlund, Callandreau, Bohlin, etc.; mais elle a de plus entraîné des progrès considérables dans les moyens d'observation. Un grand nombre de problèmes ont été soulevés par la découverte de ces astres, et leur étude paraît aujourd'hui devoir prendre une importance considérable : ceux qui, comme (279), vont s'approcher beaucoup de Jupiter, permettront de déterminer très exactement la masse de cette planète; au contraire, ceux qui s'approchent de la Terre faciliteront singulièrement une nouvelle détermination de la parallaxe du Soleil.

La découverte d'Éros, planète située entre nous et Mars, permettrait une précision plus grande encore : mais nous n'insisterons pas sur ce sujet, car Éros sort, à proprement parler, de l'anneau dont il sera question ici.

Nous ne rappellerons pas les notations qu'emploient les astronomes pour figurer géométriquement les mouvements célestes : éléments qui définissent l'orbite, et éléments d'ordre dynamique; chacun sait également comment s'introduisent naturellement le *moyen mouvement*, le *paramètre*, les diverses *anomalies* et *longitudes*. Cependant le nombre des petites planètes s'accroît rapidement et les données numériques qu'il faut discuter se font de plus en plus nombreuses, d'autant plus que l'examen minutieux de l'anneau en suggère constamment de nouvelles, comme nous allons le voir dans un instant : la

Connaissance des Temps, qui avait entrepris la publication des éléments qui les concernent, ne tarde pas à y renoncer; l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* fait bientôt aussi un choix dans ces données; nous-mêmes avons publié, à diverses reprises, des documents qui pourront être consultés; enfin on trouvera une partie des Tables nécessaires pour suivre l'histoire des petites planètes découvertes pendant le XIX^e^ siècle dans une statistique de J. Bauschinger, statistique fort bien faite mais encore insuffisante.

En vue de la connaissance générale de cet anneau, faisons donc ici rapidement quelques remarques très générales sur la nature des trajectoires :

La distance moyenne au Soleil d'une de ces petites planètes peut varier de 2,07 à 4,3, ou la durée de leurs révolutions de 3 ans à 8,8 ans.

L'excentricité de l'orbite, qui peut approcher 0,5, est généralement assez forte, 0,125 en moyenne.

L'inclinaison, très prononcée, peut aller jusqu'à 35°.

Enfin, quelques-unes d'entre elles ayant des orbites très voisines, nous avons dit que de Littrow a recherché, dans quelques cas, la possibilité des conjonctions physiques, ou passages simultanés en des points très rapprochés.

Le *Berliner Jahrbuch,* qui avait entrepris de les suivre individuellement, va bientôt être obligé de renoncer à cette tâche considérable pour se limiter à certaines catégories d'astéroïdes et, malgré l'idée heureuse de Schmidt, on ne parvient pas à organiser un *Bureau des Calculs* se chargeant de la théorie des petites planètes. Il devient indispensable de se livrer à des recherches *statistiques* sur les petites planètes, considérées comme formant un anneau : pour ce qui est, en particulier, de la distribution suivant les distances moyennes, et, par suite, de la question des lacunes, le général Parmentier ne cesse de classer les nouveaux astres par rapport à leurs distances moyennes, au fur et à mesure de leurs découvertes; E. Roger suit la même voie. Mais, de ce que les planètes rangées suivant leurs moyens mouvements se divisent en un certain nombre de groupes bien tranchés, il ne s'ensuit nullement que leur anneau, autour du Soleil, comporte les mêmes divisions et se résolve en un nombre correspondant d'anneaux sensiblement concentriques : et, en effet, au début de ces recherches, on ne considère que quelques éléments, dégagés de leurs liaisons avec les autres, ce qui ne saurait être regardé comme satisfaisant.

D'Arrest et Jahn nous montrent l'enchevêtrement de toutes les orbites comme des maillons entrelacés d'une chaîne sans bout; et, si les orbes étaient matériels, on pourrait entraîner tous les autres en tirant l'un d'eux. Lespiault et Flammarion dépeignent avec plus de détails la structure des orbites des petites planètes et les particularités de leurs mouvements.

Enfin, pour que les recherches ultérieures puissent donner des résultats probants, il faut tout d'abord connaître, avec une certaine exactitude, la structure et la situation de l'anneau formé autour du Soleil par toutes les petites planètes, ainsi que la distribution des masses dans cet anneau. Telle est l'étude systématique que nous avons entreprise en de nombreuses publications : discuter les particularités de chaque élément, puis les rapports entre divers éléments deux à deux, avant de tenter l'étude des relations plus complexes et plus cachées. Et il nous a paru sage, ici, de conserver la même marche générale, très résumée.

LES MOYENS MOUVEMENTS.

Nous nous sommes donc proposé de ranger toutes les petites planètes dans un ordre tel qu'un de leurs éléments, choisi *a priori*, aille constamment en croissant et, pour cela, nous commencerons par le plus important, le moyen mouvement. Comme, d'ailleurs, le moyen mouvement est inversement proportionnel à la durée de rotation et croît en raison inverse de la distance au Soleil, ou grand axe, cette classification revient à considérer les orbites successives ainsi qu'elles seraient effectivement rencontrées en allant de Jupiter vers Mars.

On aperçoit, immédiatement, des singularités dans la distribution, et des zones où ne semblent pas pouvoir pénétrer les astéroïdes, comme celle qui correspond à un moyen mouvement compris entre 465″ et 545″ : l'étude des *lacunes*, dans un instant, nous permettra de voir ce phénomène plus en détail.

Et d'abord, dans quelle mesure les recherches récentes enrichissent-elles l'anneau?

Il semble évident, *a priori*, que les nouvelles découvertes planétaires vont se répartir indifféremment, et venir accroître le nombre des astéroïdes dans toute la zone; or les choses ne se passent pas de la sorte : l'anneau s'enrichit sur les deux bords, par des planètes récentes qui viennent étendre sa limite, soit près de Jupiter, soit près de Mars, et surtout vers Mars, car au delà de 1050″ on ne rencontre pour ainsi dire plus de planètes anciennes; de plus, certaines régions sont beaucoup plus riches en vieilles planètes, par exemple vers 830″, 850″, 930″; d'autre part, l'engraissement de l'anneau se produit davantage dans certains intervalles, 650″-685″, 750″-770″, où il semble y avoir pénurie de planètes anciennement découvertes.

D'une manière très générale, et en négligeant quelques particularités intéressantes, on peut se résumer en disant que l'anneau semble s'enrichir progressivement pour étendre ses régions de fortes densités — ou les accentuer.

Ces singularités sont restées inexplicables par la théorie, la seule base de raisonnement moyen que l'on puisse admettre étant la suivante : on découvre des planètes dont les masses diminuent généralement.

Jusqu'à présent, cependant, nous n'avons considéré que la distribution en moyens mouvements, à l'exclusion de tout autre élément. Or une importante question se pose : les autres éléments sont-ils distribués d'une manière quelconque ou bien, pour certaines valeurs de moyens mouvements, aurons-nous des excentricités relativement grandes, des inclinaisons plutôt faibles, des longitudes de nœud voisines de celle du nœud de Jupiter? etc. Les éléments les plus importants au point de vue théorique sont, avec le moyen mouvement (ou l'axe), l'excentricité et l'inclinaison : aussi laisserons-nous momentanément de côté ces deux derniers pour revenir plus à loisir sur les comparaisons entre ces trois quantités.

Qu'indiquent donc les longitudes des nœuds?

Au maximum de densité de l'anneau 770″-777″, maximum de longitudes de nœud inférieures à 180°;

Au maximum des planètes récentes, il y a de moins en moins de planètes au fur et à mesure que la longitude du nœud augmente;

De 653″-671″, 677″-695″, 858″-917″, pas (ou très peu) de longitudes de nœuds inférieures a 120° ou 130°;

Dans l'intervalle 881″-934″, et au delà de 977″, peu ou point de longitudes de nœuds supérieures à 270°.

Mais un autre fait mérite encore l'attention : si l'on se rappelle le rôle considérable que joue Jupiter dans le système solaire, il est naturel de chercher une analogie entre la longitude du nœud de son orbite et celles des trajectoires des petites planètes, c'est-à-dire de nœuds voisins ou à 180°. L'expérience révèle la présence de telles analogies, particulièrement lorsque les moyens mouvements sont voisins de 2, $\frac{5}{2}$ et 3 fois celui de Jupiter; or les lacunes nous montreront l'importance de ces relations de commensurabilité entre les moyens mouvements, et ce serait là une bien étrange coïncidence si l'on ne pouvait songer qu'elle vient plutôt s'ajouter aux nombreux indices prouvant l'influence de cette planète dans la disposition des orbites de l'anneau.

Les longitudes périhélies, moins importantes peut-être, nous apprennent cependant que :

Dans les intervalles 400″-640″ et 970″-1200″, très particulièrement au voisinage des valeurs 975″ et 985″, il y a tendance à longitude périhélie très élevée.

Vers 690″-730″ ou 780″-815″, au contraire, faibles longitudes périhélies.

Et, enfin, si l'on cherche les planètes dont le périhélie est sensiblement sur

l'écliptique, c'est-à-dire dont la longitude du périhélie diffère de celle du nœud de 0° ou 180°, on les rencontre principalement dans ces mêmes régions où les planètes ont leur nœud ascendant voisin de l'un des nœuds de Jupiter.

LES LACUNES.

Sans doute, dans la manière dont nous venons de distribuer les astéroïdes, suivant l'ordre de leurs moyens mouvements diurnes, on peut trouver à dire que ces moyens mouvements ne sont pas les valeurs moyennes qu'il faudrait adopter, mais les valeurs *osculatrices* à des époques déterminées; toutefois, dans chaque cas, les différences n'atteignent qu'un très petit nombre de secondes, et il serait illusoire d'en tenir compte devant les incertitudes relatives aux planètes récentes, dont l'orbite est basé sur un très petit arc — orbite provisoire presque toujours.

Mais une singularité remarquable frappe, avant tout, l'attention : l'existence de deux maximums principaux, c'est-à-dire d'accumulations de petites planètes pour les valeurs des moyens mouvements voisins de 645″ et 775″, et de deux minimums principaux vers 600″ et 900″. Or, le moyen mouvement diurne de Jupiter étant d'environ 300″, on voit que les *lacunes* principales, dans l'anneau des astéroïdes, répondent à des régions pour lesquelles le moyen mouvement serait exactement le double ou le triple de celui de Jupiter; la première lacune est moins prononcée que la seconde, soit parce que l'anneau est relativement moins dense à sa limite supérieure, la plus voisine de Jupiter, soit parce que, dans ces parages, les planètes étant plus éloignées sont plus difficiles à observer. On aperçoit encore des lacunes moins importantes aux environs des valeurs 500″, 750″, 1050″, qui correspondent aussi à des commensurabilités simples $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$.

D. Kirkwood, le premier, a attiré l'attention sur les lacunes de l'anneau des astéroïdes, en les rapprochant des vides de l'anneau de Saturne, qui répondent à des régions où le moyen mouvement d'un satellite serait le double de celui du premier ou du second satellite; et, ainsi, quelques astronomes ont été conduits à penser que les petites planètes ne pourraient pas subsister si leurs moyens mouvements étaient exactement commensurables avec celui de Jupiter, le rapport étant exprimé par le quotient de deux nombres entiers simples. Ce ne serait, dans tous les cas, qu'une présomption : car il pourrait se faire que les petites planètes n'aient jamais existé dans les zones en question, sans qu'il ait été nécessaire de recourir aux perturbations pour les faire sortir de ces régions.

En fait, lorsqu'il existe des rapports approchés entre les moyens mouve-

ments, on peut rapidement, avec Kirkwood, Hornstein, etc., mettre en évidence l'existence correspondante d'inégalités à longues périodes; en résulte-t-il, par cela même, que les planètes se trouvent alors dans une région qu'elles doivent s'efforcer d'abandonner sous l'influence progressive des perturbations?

Faut-il conclure à l'instabilité?

Cependant Gauss s'était préoccupé de la possibilité de pareilles relations de commensurabilité et, dès 1812, il faisait remarquer à Bessel que le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Pallas diffère peu de la fraction $\frac{7}{18}$, ajoutant « que l'attraction de Jupiter doit maintenir exactement ce rapport, comme cela arrive pour l'égalité des durées de rotation et de circulation de la Lune ».

Et Newcomb dit, d'une manière analogue : « On s'imagine volontiers que, dans ce cas, les perturbations ne manqueront pas de croître au delà de toute limite, de manière à compromettre la stabilité du système. Or cette conséquence n'est nullement nécessaire; il n'y aurait probablement que des oscillations plus ou moins irrégulières, et l'équilibre se rétablirait incessamment ».

Ces opinions autorisées montrent que la question n'est pas entièrement tranchée et, avant de poursuivre dans un débat aussi grave, nous allons revenir un instant à nos propres recherches statistiques pour voir ce que nous enseigne l'étude des orbites elles-mêmes.

De toutes façons, si la théorie devait indiquer une lacune, pour les moyens mouvements présentant avec celui de Jupiter un rapport de commensurabilité très simple, comme 2, 3, ..., elle serait d'autant moins affirmative que la perturbation importante serait moins fréquente, c'est-à-dire que ce rapport serait plus compliqué. Aussi est-ce donc en étudiant toutes les conséquences logiques d'une action perturbatrice périodique, sur des fractions complexes, que nous espérons parvenir à quelque éclaircissement.

Nous avons formé, dans ce but, 47 fractions de la forme $\frac{p}{q}\mathrm{N}$, N étant le moyen mouvement de Jupiter, et q un nombre au plus égal à 9.

Alors, si α et β sont les moyens mouvements des deux planètes les plus voisines, consécutives, telles que

$$\alpha < \frac{p}{q}\mathrm{N} < \beta,$$

nous dirons que la lacune $\beta - \alpha$ est composée des deux demi-lacunes

$$\frac{p}{q}\mathrm{N} - \alpha \text{ (supérieure)} \quad \text{et} \quad \beta - \frac{p}{q}\mathrm{N} \text{ (inférieure)}.$$

Déjà nous faisons une remarque : les deux demi-lacunes sont nettement inégales et, plus de trois fois sur cinq, c'est la supérieure qui est la plus étendue. Par conséquent, si la lacune est réellement due à une action perturbatrice, cette action n'est pas la même de part et d'autre de la relation de commensurabilité; et, jusqu'ici, les développements numériques de nos calculs théoriques semblent confirmer une dissymétrie d'action.

Ainsi donc, après avoir classé toutes les fractions indiquées, nous allons essayer de voir si les lacunes correspondantes sont dues aux perturbations apportées par Jupiter; en d'autres termes, si, au voisinage d'un nombre de la forme $\frac{p}{q}$N, il existe une lacune plus ou moins grande dans l'ordre des moyens mouvements; et nous examinerons comment l'expérience répond aux conséquences logiques d'une telle hypothèse, en les analysant une à une.

I. Les maxima de densité de l'anneau, minima de lacunes en nombre et en grandeur, doivent correspondre à des relations compliquées, ne pouvant avoir qu'une très faible influence pour la fonction perturbatrice.

C'est précisément ce que nous avons vérifié d'une manière très nette; et, réciproquement, les minima de densité impliquent la présence de relations de commensurabilité simples.

II. Soient

$$\ldots, \quad n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad n_4, \quad n_5, \quad n_6, \quad \ldots,$$

les moyens mouvements croissants d'une série de planètes.

Si l'intervalle $n_4 - n_3$, constituant une lacune, est attribué à l'action perturbatrice de Jupiter pour une certaine relation de commensurabilité, cette différence doit être supérieure aux différences voisines

$$\ldots, \quad n_2 - n_1, \quad n_3 - n_2, \quad n_5 - n_4, \quad n_6 - n_5, \quad \ldots,$$

qui n'ont pas, jusqu'ici, de raison d'être théorique, et cela d'une manière nette.

C'est encore ce que nous avons vérifié, car, sur 37 cas, trois seulement sont douteux, et un fournit un résultat opposé.

III. On pourrait aussi penser, *a priori*, que, aux environs des relations de commensurabilité, on doit trouver autant de planètes récentes que de planètes anciennes, puisque aucune cause ne semble jusqu'ici présider à leur distribution, d'une manière absolue.

Or, au voisinage des lacunes, il paraît exister plus de planètes récentes que d'anciennes, et le résultat est assez marqué pour être signalé. Sans doute, si l'on pouvait supposer que, dans les intégrations, la masse n'intervienne pas

seulement au premier degré, cela augmenterait effectivement les perturbations dans une zone critique pour les planètes à masses plus considérables, donc généralement les plus anciennes; mais on ne saurait attacher grande importance à une telle explication.

Néanmoins, c'est encore là une singularité inexpliquée dans la manière dont l'anneau s'est enrichi progressivement.

IV. Si l'on ne peut admettre que toutes les excentricités fussent originellement égales, jusqu'ici, au moins, doit-on supposer qu'elles aient été, dans une certaine mesure, arbitrairement distribuées.

L'action perturbatrice, au voisinage d'une lacune, augmente-t-elle donc l'excentricité, et cela d'autant plus qu'il s'agit d'un corps troublé à masse plus considérable?

C'est précisément ce que l'on vérifie trois fois sur quatre sur les bords des lacunes : excentricité notablement supérieure à la normale, et d'autant plus élevée que le numéro d'ordre de la planète est plus petit.

En outre, pour les deux lacunes essentielles, 2N (planètes du type Hécube) et 3N, la disposition à l'augmentation d'excentricité se manifeste, de préférence, pour les valeurs de moyens mouvements supérieures, c'est-à-dire vers la demi-lacune inférieure; il est aisé de reconnaître encore, pour les mêmes valeurs, une diminution d'inclinaison et de longitude du périhélie, cette dernière compensée, il est vrai, par une augmentation de longitude du nœud.

V. Enfin, si les relations de commensurabilité correspondent à des zones instables, en quelque sorte, les planètes correspondantes ont dû être refoulées de part et d'autre de ces zones. Donc, entre deux relations de commensurabilité, il y aura un minimum de densité de l'anneau, puis un maximum en approchant vers chaque relation, à cause des astres qui ont été repoussés à côté de cette relation elle-même.

C'est encore ce que nous avons pu constater d'une façon formelle, avec des dissymétries de distribution qui pourraient être des conséquences, et de l'inégale influence des deux fractions consécutives et, comme nous avons eu l'occasion de le pressentir, de la dissymétrie perturbatrice d'une relation de commensurabilité donnée.

EXPLICATION DES LACUNES.

Jusqu'ici, il semblerait difficile de nier l'influence de Jupiter, même pour des termes d'ordre élevé dans la fonction perturbatrice, alors que toutes les consé-

quences logiques d'une telle action sont aussi généralement confirmées par l'observation; et, très souvent, les rares exceptions ne doivent pas être prises en grande considération : tout d'abord, elles peuvent tenir au faible nombre de planètes sur lequel on est obligé de raisonner dans certains cas, et, d'autre part, il ne faut pas oublier que certains éléments sont susceptibles d'être modifiés selon des observations plus précises, et cela d'une manière assez considérable pour les jeunes planètes. Au surplus, il existe des exceptions nécessaires à cette loi grossière que la masse est en raison inverse de la date de découverte.

Néanmoins il existe une proportion considérable de cas favorables et, fait important que nous avons également constaté, cette proportion s'améliore d'une année à l'autre — en sorte que les conclusions semblent devoir être affermies par cette amélioration.

Ne pourrait-on pas aussi chercher des perturbations analogues de la part de Mars? encore qu'elles soient extrêmement douteuses théoriquement. Nous n'avons rien publié à ce sujet, car les conclusions se montrent pratiquement moins probantes : il n'y a donc peut-être là que l'effet de coïncidences fortuites dont il serait illusoire de vouloir tirer un argument supplémentaire pour le rôle des perturbations.

Enfin nous avons fait différentes remarques sur la dissymétrie d'une lacune selon la fraction $\frac{p}{q}$ correspondante, mais il s'agit là de points très particuliers sortant du cadre d'un exposé général.

Cependant l'affirmation de Gauss sur la stabilité absolue d'une relation de commensurabilité dans le cas de Pallas eût pu rendre téméraire, à nos yeux, une étude statistique comme celle que nous venons d'exposer rapidement, et c'est ici le lieu de faire une remarque caractéristique. Nous avons dit, au paragraphe V qui précède : si l'action perturbatrice crée la lacune, on doit avoir un minimum entre deux fractions, et des maxima de part et d'autre de chaque fraction ou relation de commensurabilité. Le raisonnement est exact et l'expérience confirme le fait. Mais, avec Gauss, on peut dire exactement le contraire : les commensurabilités tendront à attirer vers elles, de part et d'autre; elles créeront un vide relatif, ou minimum, entre deux fractions et, au contraire, des maxima à droite et à gauche de chaque relation de commensurabilité, grâce aux astres qui tendent vers leur état stable. La conclusion pratique sera la même, et la statistique viendra la confirmer.

Or presque toutes les raisons peuvent être inversées de la sorte; et si, certainement, les études statistiques offrent un grand intérêt, permettent de

débrouiller un peu les multiples données numériques de cet anneau, conduisent à des remarques curieuses, parfois vérifiées théoriquement, du moins elles n'apporteront jamais une certitude sur les causes.

C'est donc à l'analyse qu'il faut demander la solution de cette question des plus délicates et, sans pouvoir indiquer ici l'ensemble considérable des travaux suscités par ce problème de stabilité, nous allons rapidement montrer comment l'idée si ingénieuse de Kirkwood est habilement combattue.

S. Newcomb juge dans le même sens que Gauss : si une semblable commensurabilité peut donner lieu à des oscillations plus ou moins irrégulières, elles sont du moins périodiques et l'équilibre doit tendre incessamment à se rétablir. Il semble encore résulter des travaux de Gylden et de Tisserand, dont R.-A. Grégory fit une exposition, que les perturbations de Jupiter ont été impuissantes à créer, *seules*, ces lacunes qui, pour des raisons cosmogoniques, ont dû exister partiellement dès la formation des astéroïdes; et si Brendel croit pouvoir reprendre *intégralement* l'hypothèse de Kirkwood pour expliquer théoriquement la présence des lacunes, ce n'est là qu'une illusion dont les développements, en partie, ne sont pas valables.

En tenant compte des indications de la théorie, on peut cependant penser que l'action de Jupiter s'est manifestée en donnant naissance à des marées à la surface de la nébuleuse solaire : et, résultant de cette cause, les astéroïdes produits se sont trouvés en plus grand nombre dans les zones de commensurabilité que partout ailleurs. Puis, alors, séparées du Soleil par l'influence de Jupiter, les petites planètes n'ont cessé d'être soumises à l'action de cette importante planète perturbatrice, et elles ont été éliminées par absorption dans les atmosphères immenses, et de Jupiter et de la nébuleuse solaire : par suite, en suivant Kirkwood, ne pouvaient conserver leur existence planétaire, parmi ces petits corpuscules, que ceux-là, seuls, dont les distances périhélies étaient supérieures au rayon de la nébuleuse contractée. Dans cette manière de voir, les lacunes auraient bien pris naissance avec la zone elle-même et ne résulteraient pas, par conséquent, des perturbations séculaires de Jupiter; par ailleurs, l'atmosphère solaire eût absorbé un grand nombre d'astéroïdes si les excentricités de leurs orbites avaient été aussi fortes qu'elles le sont actuellement, ces planètes n'eussent donc pas subsisté, et l'on est ainsi ramené à la recherche théorique des grandes perturbations possibles pour l'axe et pour l'excentricité.

On voit l'intérêt de ces questions relatives aux petites planètes, problèmes connexes à ceux des origines, de l'excentricité de Jupiter, de l'accroissement d'intensité des perturbations de Jupiter sur la nébuleuse solaire lors du périhélie, du rôle que vont jouer les aphélies des astéroïdes parallèlement aux

apulses dans le cas des comètes.... Le nombre et la variété des problèmes soulevés par la découverte de ces astres s'augmentent de jour en jour, et leur étude semble aujourd'hui prendre une importance d'autant plus grande que, sans pouvoir atteindre une solution définitive, elle a suscité du moins les recherches les plus délicates chez d'éminents géomètres.

RECHERCHES THÉORIQUES.

La base du calcul des perturbations, magistralement exposé par Tisserand, réside dans la nécessité d'avoir un développement commode, et assez complet, pour la fonction perturbatrice.

Le premier développement de ce genre a été donné par Laplace et s'étend seulement aux troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons; de Pontécoulant eut égard aux sixièmes puissances des mêmes quantités, ce que fit également Peirce, mais sous une forme plus condensée. Le Verrier a donné ensuite le développement complet, et sous une forme commode, en tenant compte de toutes les quantités du septième ordre, et F. Boquet a étendu les calculs de Le Verrier aux termes du huitième ordre.

Tous ces développements sont des fonctions explicites du temps et des éléments elliptiques, et c'est ce qui constitue leur avantage; toutefois, les dérivées de la fonction perturbatrice relatives aux coordonnées ne peuvent pas être obtenues sans transformation, et le calcul des inégalités devient pénible quand on veut avoir égard aux diverses puissances de la force perturbatrice.

Au pôle opposé, pour ainsi dire, figurent les développements dans lesquels les coefficients des cosinus des divers arguments sont purement numériques : Hansen, ayant recours à des quadratures mécaniques, paraît avoir employé, le premier, de pareils développements, mais il existe alors l'inconvénient de ne pouvoir suivre l'influence exercée par des changements apportés aux constantes adoptées.

Newcomb s'est proposé de développer analytiquement la fonction perturbatrice suivant les cosinus des multiples des anomalies excentriques des deux planètes, en exprimant les coefficients symboliquement à l'aide des éléments de ces planètes. Ce développement, auquel A. Chessin apporta quelques simplifications, converge plus rapidement que l'ancien, parce que le premier coefficient de l'expression de l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique est e, tandis qu'il est $2e$ quand on considère l'anomalie moyenne; l'emploi des fonctions de Bessel permet ensuite de passer au développement relatif aux anomalies moyennes, qui est préférable pour les planètes principales.

Il existe, en outre, un procédé intermédiaire, en quelque sorte, entre les méthodes de Laplace et de Hansen, et que l'on peut appeler la *Méthode de Cauchy-Hansen*. L'inventeur original en est Cauchy, dont l'attention fut particulièrement appelée sur ces questions à propos du cas de Pallas, comme nous allons le voir dans un instant; et l'adaptation générale, au calcul, du développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées a été faite par Hansen. La méthode de Hansen est assez généralement appliquée aujourd'hui : ce qui la caractérise, c'est le calcul des perturbations des coordonnées en faisant intervenir les dérivées partielles de la fonction perturbatrice relatives à ces coordonnées, et l'emploi de l'anomalie excentrique au lieu de l'anomalie moyenne de la planète troublée; on a recours, également, aux quadratures numériques.

Gylden, enfin, donne de son côté une théorie qui a été fort bien analysée par H. Andoyer, et qui repose sur le développement de la fonction perturbatrice suivant les sinus et cosinus des multiples des anomalies vraies : on retrouve donc les *trois* sortes d'anomalies dans les trois principales méthodes que l'on a appliquées au calcul des perturbations des astéroïdes. Gylden prend pour variable indépendante, non plus le temps, mais la longitude vraie comme l'avaient fait Clairaut et d'Alembert, et plus tard Laplace, et Damoiseau dans sa *Théorie de la Lune;* le but de ces méthodes est d'empêcher le *temps* de sortir jamais des signes sin et cos, comme cela arrive dans les méthodes de Le Verrier et de Hansen, et elles fournissent un des moyens d'obtenir ce résultat qui avait été atteint, dans un cas spécial, la *Théorie de la Lune,* par Delaunay. On connaît, à présent, d'autres solutions de cette difficulté.

D'ailleurs, dans le cas de la Lune, l'expression du développement de la fonction perturbatrice est assez simple, relativement à la longitude vraie de la Lune, parce que les arguments qui contiennent des multiples élevés de cette longitude sont affectés de coefficients très petits : cela tient à ce que la distance de la Lune à la Terre est petite par rapport à la distance de la Lune à l'astre perturbateur, le Soleil. Quand il s'agit d'une petite planète, la planète perturbatrice principale est Jupiter et le rapport $\frac{a}{a'}$ des axes qui, dans le cas de la Lune, était voisin de $\frac{1}{400}$, est ici compris entre 0,4 et 0,8; néanmoins, le développement est plus simple que si l'on emploie la longitude moyenne au lieu de la longitude vraie.

En résumé, et pour mieux faire sentir sur un exemple précis comment se pose le problème des petites planètes, nous écarterons les développements avantageux mais un peu spéciaux comme ceux de Tisserand, Backlund, ..., et nous envisa-

gerons, dans leur ensemble, les développements des perturbations planétaires tels qu'ils ont été donnés par Le Verrier d'une manière générale et d'une façon explicite. Les séries rencontrées sont de la forme

$$\sum A \frac{\sin}{\cos}(\alpha l + \alpha' l' + \beta\omega + \beta'\omega' + \gamma\theta + \gamma'\theta'),$$

où l, l', ω, ω', θ et θ' désignent les longitudes moyennes, les longitudes des périhélies et celle des nœuds; α, α', β, β', γ et γ' des nombres entiers positifs ou négatifs dont la somme est égale à zéro; les coefficients A sont des fonctions de a, a', e, e', i, i', quantités constantes qui répondent aux demi-grands axes, aux excentricités et aux inclinaisons : A contient en facteur

$$e^{(\alpha)} e'^{(\alpha')} i^{(\gamma)} i'^{(\gamma')}.$$

Nous pouvons alors immédiatement remarquer que certaines circonstances contribuent à rendre ces développements assez rapidement convergents.

D'abord, pour les grosses planètes, e et e' sont des quantités inférieures à 0,1, sauf dans le cas de Mercure dont l'excentricité est égale à 0,2 environ; i et i' sont au-dessous de 3°3o', sauf le cas de Mercure dont l'inclinaison est d'environ 7°. Cette petitesse relative de e, e', i, i' fait que les coefficients A diminuent rapidement quand les entiers β, β', γ, γ' augmentent : c'est une première limitation.

En second lieu, les grands axes des orbites ne sont jamais très voisins les uns des autres; la plus grande valeur de $\frac{a}{a'}$ est 0,723 dans le cas de Vénus et de la Terre. Ces valeurs, relativement modérées, limitent les coefficients α et α'; si le rapport $\frac{a}{a'}$ était plus voisin de 1, il faudrait employer des valeurs beaucoup plus grandes pour les entiers α et α'.

Enfin, dans la première approximation, les coefficients A contiennent en facteur le rapport m' de la masse perturbatrice à la masse du Soleil; la plus grande valeur de m' correspond à Jupiter et est inférieure à 0,001 : cela contribue aussi à la petitesse des perturbations et à la convergence des approximations successives.

Il est toutefois une circonstance qui augmente les coefficients A; ces coefficients contiennent en effet les diviseurs $\alpha n + \alpha' n'$, ou même leurs carrés. Si les rapports $\frac{n}{n'}$ étaient rigoureusement commensurables, on pourrait trouver des valeurs des entiers α et α' telles que les diviseurs en question fussent nuls, auquel cas la méthode suivie serait complètement en défaut. Heureusement ce cas ne se

présente pas, mais il n'est pas très éloigné d'être réalisé; c'est ainsi que, pour Jupiter et Saturne, on a

$$\frac{n}{n'} = \frac{5}{2} - \frac{1}{60}$$

et, pour Uranus et Neptune,

$$\frac{n}{n'} = 2 - \frac{1}{26}.$$

Voyons donc ce qui arrive pour les petites planètes :

Les excentricités sont beaucoup plus prononcées : elles peuvent approcher de 0,5.

Les inclinaisons sont fortes, et celle de l'orbite de Pallas sur l'écliptique est presque égale à 35°.

Pour la partie difficile des perturbations, la masse perturbatrice est toujours celle de Jupiter : m' est donc voisin de 0,001.

Le rapport $\frac{a}{a'}$ des demi-grands axes de la petite planète et de Jupiter reste compris, jusqu'ici, entre 0,40 et 0,82.

Enfin, il y a des rapports de commensurabilité très approchés : ainsi, pour la planète (332), on a

$$\frac{n}{n'} = 2 + \frac{1}{41};$$

l'inégalité à longue période, dont l'argument est $l - 2l' + \text{const.}$, étant du premier ordre, pourra acquérir des valeurs considérables.

On comprend, d'après cela, que la méthode usuelle pour le calcul des perturbations, celle dont Le Verrier s'est servi constamment, présente de sérieuses difficultés : dans des cas convenablement choisis, son emploi serait même matériellement impossible. Des efforts nombreux ont été faits pour aboutir à une méthode efficace en vue du calcul des perturbations des petites planètes; mais toutes ont leurs imperfections, leurs lacunes, et manquent de généralité. Dans chaque cas particulier, on peut effectuer des développements, mais aucun procédé ne permet de conserver dans les formules des paramètres arbitraires permettant d'étudier simplement, à travers l'anneau, l'allure et les modifications de telle perturbation de caractère un peu général.

CAS PARTICULIERS.

Au point de vue théorique, jusqu'ici, il n'y a donc pas possibilité d'étudier le problème de la contexture de cet anneau dans toute sa généralité et il nous reste à dire un mot, par conséquent, des recherches particulières, déjà si impor-

tantes, qui ont puisé leur origine dans l'étude approfondie des perturbations planétaires.

Gauss avait travaillé à une théorie de Pallas et, dans une de ses lettres à Bessel, nous voyons qu'il avait trouvé plus de 800 inégalités sensibles : à côté de cette théorie générale, l'illustre géomètre avait conduit parallèlement le calcul par quadratures, de manière à obtenir un contrôle qui est presque indispensable. Gauss n'a jamais publié ce travail, mais la Société royale des Sciences de Göttingue a fait imprimer tout ce que l'on a trouvé dans ses papiers sur cette importante question.

Reprenant le cas de Pallas, Le Verrier avait soumis au jugement de l'Académie le calcul numérique de sa grande inégalité, dont la période est d'environ 800 ans. Cette inégalité est du onzième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, mais elle se trouve néanmoins très sensible à cause de la petitesse du diviseur $18n' - 7n$, n' et n désignant les moyens mouvements de Pallas et de Jupiter, et ce diviseur, en effet, intervient au carré dans la perturbation de la longitude moyenne. Par un double système de quadratures numériques, Le Verrier obtient l'inégalité en question et trouve que son maximum est $895''$.

Cauchy était le rapporteur de la Commission académique : il était désireux de contrôler les longs calculs numériques de Le Verrier, mais ne se souciait pas trop de reprendre tous ces calculs par le menu. C'est alors qu'il imagina, en quelques semaines, une méthode très remarquable, développée dans six Notes qui sont annexées à son Rapport : il vérifie rapidement le résultat obtenu, de deux manières et à l'aide de deux méthodes différentes; il trouve successivement, pour coefficient de l'inégalité, $906'',6$ et $906'',3$, et il remarque que la petite différence de ces deux valeurs avec le nombre $895''$ est seulement de l'ordre des erreurs que pouvait amener l'usage des Tables de Logarithmes à sept décimales dont Le Verrier s'était servi.

La méthode de Cauchy peut être souvent avantageuse, surtout si l'on considère les inégalités à longue période provenant des termes dans lesquels figurent des multiples élevés des longitudes moyennes; ces termes seraient insensibles dans la théorie des grosses planètes, vu la grandeur des coefficients α et α' de l et de l' dans l'argument, mais ils peuvent cependant acquérir des valeurs notables dans le cas de certains astéroïdes. V. Puiseux en fit une exposition claire et détaillée, étendant en même temps le résultat de Cauchy à la seconde partie de la fonction perturbatrice, et réduisant ainsi le coefficient $906'',6$ à la valeur $905'',7$. Cette méthode a fréquemment été utilisée, depuis; le champ de ses applications a été étendu, et elle a servi de base à d'importants travaux, notamment de la part de Bourget, Houël, Callandreau, etc.

Cependant, les procédés analogues à ceux de Le Verrier, appliqués avec précaution, peuvent utilement rendre des services pour un grand nombre d'astéroïdes : c'est ainsi que Damoiseau a ébauché la question des perturbations de Cérès et de Junon, et que Perrotin fit la théorie de la planète Vesta.

Par ailleurs, dans son premier Mémoire, Hansen publie les premiers rudiments des méthodes qu'il va appliquer, durant toute sa carrière, à la Lune, aux petites planètes et aux comètes. Tout va découler d'un même principe : développer la fonction perturbatrice suivant les sinus et cosinus des multiples des anomalies excentriques, ce qui fournit des expressions plus simples qu'avec les anomalies moyennes; employer simultanément la méthode des quadratures, pour tenir un compte rigoureux de toutes les puissances de la planète troublée. Puis vient son plus élégant Mémoire, relatif aux perturbations de Jupiter et de Saturne, que nous avons mentionné plus haut; ses méthodes les plus récentes ont été appliquées pas à pas avec le plus grand succès, au même problème, par un astronome du plus grand mérite, Hill, en tenant compte des termes du deuxième et du troisième ordres par rapport aux masses.

Les recherches de Hansen, en ce qui concerne les comètes, sont moins heureuses : aussi n'ont-elles pas été achevées et, dans ce cas, elles peuvent être alors extrêmement laborieuses, sinon impossibles. Au contraire, ses indications relatives aux petites planètes — exposées, si l'on veut, par Venturi — ont actuellement fait leurs preuves : Brunnow applique les méthodes de Hansen aux astéroïdes Iris et Flore, numérotés (7) et (8); Becker fait parallèlement la théorie de (29) Amphitrite; Lesser, celles de Pomone et de Métis, soit (32) et (9); et Leveau reprend ainsi la théorie faite par Perrotin sur Vesta.

Mais, dans ces dernières années, ce sont principalement les méthodes de Gylden qui ont été suivies et appliquées avec succès par de savants analystes tels que Backlund, Harzer, Bohlin, Charlier, Masal en tenant compte des excentricités, Brendel, Max Wolf, Callandreau, Olsson en tenant compte des inclinaisons, ... On se préoccupe alors, surtout, de déterminer les *orbites absolues* des astéroïdes en tenant compte des termes séculaires et des termes à longues périodes; déterminées avec précision, ces orbites pourraient être utilisées pendant fort longtemps pour calculer les positions de la planète, qui ne s'en écarteraient que de petites quantités périodiques : ce serait certainement là un point de grande importance à résoudre, car le nombre toujours croissant des découvertes d'astéroïdes empêche de consacrer à chacun d'eux une théorie complète. En tenant compte de la condition que l'on s'impose de ne jamais faire sortir le temps des signes trigonométriques, on s'interdit les développements paraboliques pour les perturbations séculaires que peuvent apporter les élé-

ments de Jupiter — développements qui sont rapidement convergents pour un assez grand nombre de siècles — et l'intégration rigoureuse des équations différentielles réduites introduit des termes dont les périodes sont extrêmement longues : 50 000 ans au moins. Tout récemment encore, Backlund revise les fondements mêmes de la théorie de Gylden et, avec Ivanoff et de Zeipel, il assure autant que possible la convergence numérique des développements; Bohlin écrit aussi une Note importante sur cette convergence.

Dans ses développements, Gylden a rencontré des termes qu'il appelle *hyperélémentaires*, et qui seraient très gênants si, heureusement, ils ne se détruisaient point : une circonstance identique s'est d'ailleurs présentée à Laplace dans la *Théorie de la Lune*. Les singularités intéressantes de ces méthodes ont été étudiées, notamment, par Backlund et Charlier, et l'on peut, au reste, formuler une critique d'ordre général sur ces théories et sur la considération des orbites absolues : il semble bien que, dans l'état actuel de la Science, et vu le nombre restreint d'années d'observations dont on peut disposer, l'ensemble des termes à longues périodes, telles que 20 000 ans et au-dessus, devrait être remplacé par une formule parabolique développée suivant les puissances du temps; c'est dans cet esprit que nous avons poursuivi nos recherches théoriques, dont nous donnerons un résumé à la fin de ce paragraphe, car les termes périodiques ne peuvent avantageusement remplacer les termes séculaires que dans un avenir très éloigné.

Au reste, quand bien même les séries qui se présentent seraient divergentes, d'éminents auteurs, avec A. Hall, pensent que l'on ne peut guère douter de la stabilité du système solaire, et seraient désireux, à côté de recherches théoriques, de voir pousser plus activement les applications numériques et pratiques, trop souvent négligées.

Ainsi, dans l'impossibilité de résoudre sous sa forme générale le problème de l'anneau et des lacunes, on va étudier plus en détail certaines perturbations particulières, comme A. Féraud, ou certaines inégalités singulières, avec Charlier; faire, comme H. Andoyer, des remarques sur les cas de commensurabilité approchée; consolider, avec Klinkerfues, Masal, ..., les recherches théoriques par l'établissement de Tables numériques; tenter des Tables de perturbations pour quelques cas spéciaux, comme Bohlin, Gylden, ...; pousser plus loin l'approximation de certains cas particuliers, comme nous l'avons déjà vu, et comme le fait Max Wolf pour Cérès; et, très spécialement, on va, avec H. Happel, Callandreau, nous-mêmes, ..., approfondir le *problème restreint*, c'est-à-dire celui où l'on suppose une inclinaison nulle par rapport au plan de l'orbite de Jupiter.

En dehors de tous les travaux spéciaux qu'il nous est impossible d'énumérer ici, la méthode de Gylden paraît devoir être importante dans les cas de commensurabilité très approchée ; il se confirme de plus en plus qu'il devient alors utile, même nécessaire, d'introduire les fonctions elliptiques. On pourrait peut-être encore la simplifier, ou employer la méthode de Bohlin, et c'est ici le lieu de remarquer que le cas de $\frac{n'}{n} = \mu$, voisin de $\frac{1}{2}$, est plus difficile que celui où μ est voisin de $\frac{1}{3}$, parce que les planètes sont plus voisines de l'orbite de Jupiter dans le premier cas que dans le second et que les inégalités à longue période sont du premier ordre relativement aux excentricités, tandis qu'elles sont du second ordre, seulement, lorsque μ est voisin de $\frac{1}{3}$.

Les efforts vont, en effet, se localiser tout d'abord sur les deux principales lacunes, correspondant aux deux relations de commensurabilité les plus simples, $\frac{n}{n'} = 2$, et $\frac{n}{n'} = 3$.

Pour la première lacune, les moyens mouvements des astéroïdes seront voisins de 600″ : c'est ce que l'on appelle le *type Hécube*, du nom de la (108) petite planète qui rentre dans ce cas. Le moyen mouvement de Hécube diffère peu du double de celui de Jupiter et l'on a $\frac{n}{n'} - 2 = \frac{1}{16}$. Harzer, qui a repris la question des lacunes indiquées par Kirkwood, a donné une représentation graphique des moyens mouvements des planètes et, au point de vue théorique, il commence par l'emploi des méthodes de Gylden ses recherches sur les planètes du type Hécube, à fortes perturbations. C'est ce que l'on a fait de plus complet dans ce genre, mais il faut en rapprocher les nombreux travaux de Backlund qui choisit le temps pour variable indépendante, imitant la théorie de Laplace pour les satellites de Jupiter, et s'appliquant, soit à Hécube, soit à une planète du même groupe, (184) Déïopée ; à sa suite, Ivanoff construit d'utiles Tables auxiliaires et de Zeipel, par la méthode de Bohlin, étudie les perturbations des astéroïdes, partagés en groupes. L'une des théories les plus délicates à établir serait probablement celle de la planète (332), dont l'excentricité est très forte, et pour laquelle $\frac{n}{n'} = 2 + \frac{1}{40}$; et, pour diverses raisons théoriques, les astres (381) et (385) appellent encore particulièrement l'attention des astronomes.

Découverte le 2 avril 1869, par Luther, à Dusseldorf, la planète Hécube devait donc immédiatement attirer la sollicitude des géomètres par le cas important auquel elle correspond en fait de perturbations ; et, tenant compte de chaque nouvelle opposition, Schulhof a pu en calculer de nombreuses orbites : elle commence donc à être suffisamment bien connue pour servir de contrôle précis à la théorie. Gylden et Harzer, nous venons de le voir, en font l'objet de savants

travaux, et la première chose qui frappe, dans la comparaison des orbites successives, consiste en une variation sensible du moyen mouvement, une diminution constante et notable de la longitude périhélie, tandis que l'excentricité augmente. Or si, en première approximation, on veut partir d'une orbite képlérienne pour développer les approximations suivant les puissances de la masse de Jupiter, on obtient une série divergente; et c'est pour éviter un tel inconvénient que Harzer choisit une orbite intermédiaire en introduisant, dès l'origine, les termes à longue période les plus importants : la méthode de Gylden permet alors d'éviter entièrement les termes séculaires.

D'autres singularités se présentent encore à Tisserand à ce propos : d'abord la partie de l'excentricité qui dépend des perturbations peut dépasser la partie fixe; et, de plus, on rencontre souvent la nécessité, en pareils cas, d'introduire les fonctions elliptiques. Dans un travail élégant, Simonin s'est d'ailleurs proposé d'éviter les fonctions elliptiques et de simplifier ainsi les méthodes antérieures, en vue des applications numériques essentielles. En fait, on peut représenter sensiblement le mouvement par une solution périodique ; mais, en revanche, à raison des perturbations à longues périodes, les constantes d'intégration ne peuvent être convenablement déterminées qu'à la suite de longues années d'observations. Alors, seulement, l'accord pourra être plus parfait.

Ainsi, le *type Hécube*, le plus délicat, a été l'objet de travaux nombreux qu'il nous est impossible d'analyser ici en détail, et parmi lesquels il faut encore citer ceux de Ludendorff, J. Kramer, Bohlin, K. F. Sundman, H. Poincaré, etc. : en résumé, dans certains cas, les moyens mouvements peuvent être exactement commensurables, à un moment donné, sans qu'il en résulte aucune instabilité ; les oscillations sont régulières, de part et d'autre, et la circonstance de la commensurabilité exacte se reproduit périodiquement. Cela est bien conforme à ce qu'avait présumé Newcomb.

La seconde lacune comporte des moyens mouvements voisins de 900″ : c'est le *type Hestia*, du nom de l'astre (46) qui a suscité plus particulièrement les importantes recherches de Bohlin et Brendel. L'intéressante planète (6) Hébé, étudiée par H. Lemke, appartient à ce groupe.

D'autres lacunes attirent encore l'attention : à la relation de commensurabilité $\frac{2}{3}$ correspond le *type Hilda*. Dans ce cas, envisageant le problème restreint où tous les mouvements se produisent dans le plan de Jupiter, Caillandreau parvient à d'élégantes et importantes conclusions : si l'on suppose que les orbites primitives soient peu différentes de cercles, les résultats théoriques s'accordent avec les caractères présentés par la lacune correspondante dans l'anneau des petites planètes. Le type Hilda, intéressant, est relativement peu étudié : cepen-

dant, un criterium de Tisserand permet de penser que la planète (334), Chicago, appartenant à ce groupe, pourra donner lieu à un cas de libration; et, comme l'excentricité et l'inclinaison sont faibles, on peut tenter d'appliquer la méthode de Le Verrier. Les calculs ont déjà été préparés, dans ce cas, par Kurt Laves.

Plusieurs planètes du type $\frac{1}{3}$ ont été traitées avec succès par la méthode de Hansen, et pourraient être étudiées par des procédés analogues à ceux employés par Bohlin; les calculs de ce dernier n'étaient pas entièrement satisfaisants, tout d'abord, et Callandreau avait montré que les différences en inclinaisons et en excentricités pouvaient atteindre des valeurs inadmissibles. Bohlin a donc apporté d'importants perfectionnements à ses travaux antérieurs : heureusement secondé par des collaborateurs dévoués tels que Olsson, Carlheim, Gyllenskiold, Hoffman, von Zeipel, Stoltz, Wellmann, Bucht, il put donner les calculs supplémentaires et nécessaires pour obtenir un accord satisfaisant entre les perturbations calculées et les orbites actuellement décrites par les planètes. Ses formules et les Tables numériques correspondantes constituent une base importante à l'étude des mouvements planétaires.

Enfin des travaux spéciaux comme ceux de Bauschinger, les nôtres, viennent encore enrichir l'histoire des planètes et, à tout instant, la théorie fournit d'utiles indications : la planète (3) Vesta est étudiée par Perrotin et Leveau; (4) Junon par Berkiewicz; (6) Hébé, par Gylden; Lesser avait considéré les cas de (9) Métis et (32) Pomone, et les résultats de Bohlin relatifs à ces deux planètes viennent s'accorder avec les siens; (13) Égérie est étudiée par Hansen; (21) Lutetia, par Lesser; (29) Amphitrite, par Bohlin, dont les résultats s'accordent avec les recherches antérieures de Becker; (51) Nemausa, par Hall; etc.

Et l'un des enseignements les plus nets et les plus féconds de tous ces travaux, de la discussion des divers points théoriques du problème si difficile des perturbations planétaires, c'est que le choix des variables est certainement une chose de première importance; car, en effet, dans les vastes formules des perturbations, l'introduction d'une simplification, insignifiante à l'égard des notations ou des variables employées, peut grandement faciliter, plus tard, les développements, et servir à nous faire entrevoir plus clairement le mécanisme des formules. A cet égard, il faut avouer que les conceptions de Hansen sur le développement de la fonction perturbatrice ont essentiellement contribué au progrès de ce problème capital : peut-être, aujourd'hui, pourrait-on les simplifier encore.

Ainsi, en résumé : d'une part, l'analyse conduit à séparer cet anneau en petits groupes de planètes et nous aurons plusieurs occasions, par ailleurs, de montrer combien s'impose la nécessité des groupements; cette subdivision facilite la recherche des perturbations relatives à chaque groupe, ou au voisinage de chaque

lacune, comme Brendel; elle permet à Callandreau de mener à bien le calcul des inégalités à longues périodes; et, dans cette voie de subdivisions, à la suite de Bohlin, il faut citer les travaux comme ceux de Becker, de Zeipel, Olsson, etc., suivis, bien entendu, de tentatives de Tables de perturbations pour certains cas particuliers avec Bohlin, Masal, etc. Et, d'autre part, cet emploi même de méthodes particulières, propres à chaque difficulté soulevée, conduit à se poser, comme Newcomb, une question de la plus haute importance : à savoir la légitimité de chaque méthode, et l'intervalle de temps pendant lequel on peut compter sur son application rationnelle.

Le problème des trois corps, dans le cas particulier qui va désormais nous occuper, a fait l'objet de deux méthodes très distinctes : on peut, avec Tisserand et Newcomb, partir des équations différentielles des éléments de l'orbite, ou, d'un autre côté, chercher des approximations successives dans les équations différentielles des coordonnées elles-mêmes, comme l'ont fait Gylden, Harzer, Callandreau. Nous avons suivi cette dernière méthode pour y utiliser les procédés d'approximation indiqués par Laplace et, en de nombreuses publications, nous avons montré les résultats que l'on en pouvait espérer — ce que nous allons ici résumer succinctement.

Les petites planètes ont, en général, des inclinaisons assez faibles par rapport à l'orbite de Jupiter et, pour se rendre compte de l'action de cette planète sur la distribution des astéroïdes, on peut, en première approximation, se placer dans le cas d'un *problème plan*, tout en négligeant, bien entendu, la masse de la petite planète. Dans le cas de ce problème restreint il n'y a plus que deux équations différentielles du mouvement plan, et l'on sait ramener la question à l'étude d'une équation de second ordre. D'ailleurs, comme le but final de nos recherches est la constitution même de cet anneau, et non la théorie précise de l'un des corpuscules, nous sommes en droit absolu de négliger pour l'instant l'excentricité de Jupiter, dont le périhélie s'est successivement présenté dans les diverses situations relatives.

L'intégrale de l'équation du second ordre à laquelle on parvient de la sorte peut être développée suivant les puissances croissantes de petits paramètres et, en dirigeant convenablement les calculs, on peut achever l'approximation sans opérations purement numériques, pour parvenir à des formules générales, applicables dans tous les cas aux perturbations de Jupiter. Cependant, n'ayant aucun parti pris relativement à la nature de ces perturbations, nous laissons subsister les termes séculaires, tels qu'ils s'introduisent naturellement dans les opérations successives; d'ailleurs, nous en avons profité pour montrer que ces termes mêmes ne sont pas très élevés, et que le petit nombre d'oppositions observées pour les

planètes rendra presque toujours illusoire le souci de vouloir s'en débarrasser systématiquement.

Sans doute, cette méthode n'est pas parfaite; si l'on exclut, autant que possible, toute forme numérique, le calcul littéral se complique assez rapidement : ainsi nous nous sommes bornés aux termes du troisième degré par rapport à l'excentricité, et le maniement des fonctions correspondantes exige déjà un certain soin. Nous pensons qu'il serait encore facile de la pousser jusqu'aux termes du cinquième degré, mais quelques essais nous ont suffisamment montré que vouloir dépasser une telle approximation entraînerait une grosse besogne matérielle. Et, d'ailleurs, aux termes près du quatrième ordre, notre approximation est suffisante dans la majorité des cas : car, encore une fois, il ne s'agit pas ici d'obtenir une théorie complète et précise de tel astéroïde, mais bien d'acquérir des indications sur la variation des perturbations tout le long de l'anneau. La méthode que nous employons s'adapte bien à ce but, et nous allons voir les résultats que l'on en peut espérer dès à présent.

Soient donc a le demi-grand axe d'une planète intérieure à Jupiter, et r sa distance au Soleil; si nous posons

$$r = \frac{a}{1+\rho},$$

la quantité ρ dépendra précisément de l'équation du second ordre dont nous parlions, et pourra se définir en fonction de l'angle θ, élongation de la planète troublée par rapport à Jupiter, planète troublante. Nous conservons jusqu'au bout dans nos calculs, sans les expliciter, quatre quantités représentant l'excentricité et la position du périhélie, la relation de commensurabilité et la proximité de la lacune, c'est-à-dire, justement, les influences que nous cherchons dans la distribution de l'anneau — à condition de ne pas approcher, bien entendu, des régions critiques des grandes lacunes étudiées par ailleurs.

La quantité ρ qu'il s'agit d'étudier est de l'ordre de l'excentricité; sa connaissance permettra d'avoir les variations du rayon vecteur r. Mais le rayon vecteur ne subit pas des perturbations considérables, et la planète ondule toujours légèrement autour de son orbite elliptique, de sorte que, pour rendre ces perturbations immédiatement appréciables, pour en faciliter la représentation, il est préférable de calculer les valeurs de

$$R = 1 - \frac{r}{a} = \rho - \rho^2 + \rho^3 - \dots;$$

R est alors une fonction de θ, angle qui varie sensiblement d'une manière pro-

portionnelle au temps, et la courbe ainsi définie en coordonnées polaires,

$$R = \text{fonct. } \theta,$$

illustrera simplement la trajectoire de la planète dans un système d'axes mobiles.

Nous avons indiqué la forme sous laquelle on peut mettre R : il est alors aisé d'étudier les perturbations indépendantes de l'excentricité, c'est-à-dire de voir comment une petite planète oscille autour de son orbite primitive supposée circulaire. Nous avons calculé les différentes courbes, tout le long de l'anneau, pour 53 valeurs de l'axe a, valeurs qui correspondraient aux relations de commensurabilité les plus simples, et le faisceau de ces courbes nous donne les perturbations des différentes planètes autour de leurs positions moyennes : ce sont précisément les propriétés de toutes ces trajectoires que nous avons pu étudier de très près, et suivre dans leurs transformations de l'un à l'autre bord de l'anneau.

Jusqu'ici les perturbations que nous calculons représentent, en quelque sorte, une partie résiduelle : étant indépendantes de l'excentricité, cela revient à dire que, par hypothèse, la petite planète possédait originellement une orbite circulaire. Néanmoins nous avons montré l'importance de ces déterminations numériques pour le calcul des orbites, la construction d'éphémérides, et surtout leurs corrections ; en effet, ces perturbations sont assez considérables pour qu'il soit impossible d'identifier le mouvement final de la planète avec un mouvement elliptique, fût-il approximatif : même sans se placer dans des cas extrêmes, le rayon vecteur d'une planète peut fréquemment éprouver, du fait de ces termes seuls, des modifications rapides, susceptibles d'atteindre le centième de sa valeur, réagissant dans la même proportion sur l'axe ou sur l'excentricité.

Après les perturbations qui ne dépendent que de l'élongation, l'action de Jupiter sur une petite planète se manifeste principalement par les termes séculaires du premier degré par rapport à l'excentricité, et, si leur caractère séculaire n'est qu'apparent, ces termes pourront du moins être utilisés pour une amplitude très suffisante de l'élongation θ ; et, connaissant la première partie des perturbations que nous venons de signaler, il importe de calculer ces termes séculaires dans la perturbation du rayon vecteur de la planète au Soleil, pris sous la forme R.

C'est ce que nous avons fait, également, avec tous les détails nécessaires aux applications de la pratique.

Tel est, en première approximation, le résultat de nos recherches sur les perturbations que Jupiter détermine dans l'anneau des petites planètes ; nous ne

désespérons pas de pouvoir donner bientôt des résultats tout aussi complets en tenant compte des perturbations périodiques de l'excentricité, mais, dès à présent, nous jugeons qu'il est intéressant de pouvoir suivre ainsi, tout du long de l'anneau, l'influence d'une partie bien définie des perturbations : c'est ce que nous avons établi dans le problème plan lorsque, pour la position de l'astre perturbé, on ne tient compte que de sa distance moyenne au Soleil, de son élongation par rapport à Jupiter, et des termes séculaires en apparence.

Et l'examen des valeurs de R nous montre encore une conséquence aussi importante qu'inattendue : R est, dans le cas général, de l'ordre de l'excentricité, circonstance analogue à celle qu'avait rencontrée Tisserand. Or, dans le cas particulier du problème circulaire qui nous occupe, on voit, par les valeurs extrêmes de R, que leur différence équivaudrait à une excentricité de 0,05 : en effet, pour $a = 4{,}07$ par exemple, on peut avoir $R = -0{,}03$ et $R = +0{,}02$. Mais, ici, les valeurs extrêmes se produisent, bien entendu, pour des intervalles variant de 150° à 60° pour θ, à cause des mouvements relatifs de la petite planète et de Jupiter, d'un bord à l'autre de l'anneau; néanmoins il est impossible d'identifier le mouvement final avec un mouvement elliptique. Ainsi, même sans nous placer dans le cas maximum que nous venons de signaler, le rayon vecteur d'une planète peut fréquemment éprouver des modifications rapides, susceptibles d'atteindre le centième de sa valeur, ou du moins quelques millièmes, suivant son élongation par rapport à Jupiter; et, dans certains cas défavorables, où pareille altération se produit très rapidement, on peut être induit de ce fait en erreur de millième sur l'axe ou l'excentricité de la planète.

Or il arrive souvent la chose suivante : on découvre une planète, on l'observe, on calcule son orbite,... puis cet astre est perdu malgré l'éphéméride qui en résulte, ou cependant, si la photographie permet de le retrouver, on constate une correction d'éphéméride considérable. D'autres fois, l'orbite calculée représente insuffisamment les observations.

Et c'est là la conclusion pratique de nos recherches théoriques : nous montrerons ailleurs sur des exemples appropriés que, dans ce cas, la planète avait précisément une élongation critique par rapport à Jupiter, ce qui a entaché l'orbite d'erreurs appréciables. Nos résultats permettront réciproquement au calculateur d'éviter une éphéméride insuffisante : la première orbite grossière donnant l'axe lui montrera si, oui ou non, dans les observations qu'il utilise, la planète était dans une position critique et, si oui, rien ne sera plus aisé que de tenir compte de cette perturbation limitée, pendant la durée des observations.

EXCENTRICITÉS ET INCLINAISONS.

Faisons, pour ces éléments, ce que nous avons fait pour les moyens mouvements : rangeons les petites planètes par rapport à leurs excentricités croissantes, puis, dans un instant, par rapport à leurs inclinaisons.

Voici le résumé des observations que l'on peut faire :

Il y a des maxima de densités pour les valeurs d'excentricité 0,165 et 0,130 ; 0,120; 0,100, 0,085, 0,070 et 0,190; 0,205;

Les très faibles excentricités correspondent à des valeurs récentes;

Il y a en moyenne deux fois plus de planètes récentes pour les faibles excentricités, et cette supériorité est très accusée dans les valeurs 0,000-0,115, 0,025-0,035, 0,060-0,065...;

A partir de 0,135 il y a supériorité constante de planètes anciennes; l'enrichissement de l'anneau se produit donc nettement par des excentricités $< 0,125$.

Si l'on cherche alors comment sont distribuées les longitudes des nœuds et des périhélies, on observe des variations brusques entre la zone la plus riche en densité 0,12 à 0,14 et les zones voisines; mais, en revanche, il n'y a pas, dans cette disposition, de groupement pour lequel les longitudes de nœud aient un rapport simple avec le nœud de Jupiter.

Passons rapidement aux inclinaisons; sans nous attarder aux détails de statistique, on voit :

Maxima de densités en inclinaisons vers 5°-5°15′, 2°10′ et 7°50′ ... et pénurie de planètes, au contraire, pour les intervalles 4°0′-4°15′, 10°55′-11°16′, 12°12′-12°33′, 13°44′-14°4′, 14°22′-14°47′;

L'anneau s'enrichit d'une façon à peu près régulière en inclinaisons, quoique peut-être davantage vers 7°-8°.

Il est indispensable de comparer entre eux d'une manière un peu plus minutieuse les trois éléments dont le rôle est prépondérant au point de vue théorique, à savoir le moyen mouvement, ou le demi-grand axe, l'inclinaison et l'excentricité, comparaison dont nous allons indiquer les grandes lignes.

Si donc nous reprenons le rangement suivant les moyens mouvements, on constate immédiatement :

Les planètes à excentricités considérables ont des moyens mouvements compris entre 725″ et 835″;

Minimum de faibles excentricités et, réciproquement, tendance à excentricités assez fortes pour les intervalles en moyens mouvements 635″-685″ et 870″-995″;

Maximum de faibles inclinaisons dans l'intervalle 636″-678″, et au delà de 912″;

Correspondance notable entre les minima de faibles excentricités et les maxima de faibles inclinaisons. Suivant la distance à laquelle on se trouve de Jupiter, il semble donc y avoir des zones pour lesquelles ce sont, alternativement, l'excentricité et l'inclinaison qui éprouvent des perturbations sensibles.

Mais il est clair que de telles remarques peuvent n'être point réversibles : certaines valeurs en moyen mouvement peuvent entraîner des valeurs déterminées d'inclinaison, par exemple, sans que ces mêmes inclinaisons spécifient en quoi que ce soit la valeur possible du moyen mouvement. Et, d'autre part, la remarque est d'autant plus importante si la réciproque est exacte : ce qui nécessite les rangements inverses.

Prenons les inclinaisons croissantes; elles nous indiquent :

S'il y a maximum de faibles inclinaisons pour des distances au Soleil de 3, ou légèrement supérieures à 2, il y a, réciproquement, une quantité notable de demi-grands axes peu supérieurs à 2 ou 3 pour des inclinaisons relativement faibles de 3°-4° et de 1°;

Par contre, en arrivant vers 5° d'inclinaison, on rencontre un minimum net de distances moyennes supérieures à 3 et, au contraire, deux maxima importants pour ces distances vers 8°, ainsi que pour les très fortes inclinaisons;

Maximum des distances 2,5-3,0 vers 8°, et surtout pour les fortes inclinaisons, 14°environ : la réciproque de ces propositions existe pour les intervalles 757″-817″ dans la classification en moyens mouvements;

Diminution très nette de fortes inclinaisons, surtout vers 13°, pour les planètes les plus rapprochées du Soleil;

Enfin, instabilité pour les petites excentricités vers 7°-9° d'inclinaison, ou bien encore pour les très fortes inclinaisons : cette variation, encore sensible pour des valeurs analogues d'inclinaisons, est cependant moins marquée sur les excentricités moyennes 0,1-0,2, mais se fait sentir très vivement sur les maxima de fortes excentricités.

Qu'indique maintenant la classification par excentricités croissantes?

Aux environs du maximum des excentricités, 0,12 environ, il y a pénurie de planètes très éloignées du Soleil;

Juste avant ce maximum il existe, au contraire, diminution de planètes très rapprochées et rapprochées du Soleil, tandis que l'on trouve un maximum important de planètes voisines de Jupiter;

Maximum de planètes à inclinaisons très faibles et faibles pour des excentricités très faibles et faibles;

Pour les inclinaisons de 8° à 16°, deux minima importants : l'un pour le maximum de densité en excentricités, l'autre pour les grandes excentricités;

D'une manière générale, l'inclinaison varie dans le même sens que l'excentricité.

INSTABILITÉS.

En admettant que toutes les planètes aient été, dès l'origine de leur formation, lancées dans des orbites légèrement excentriques et peu inclinées sur le plan elliptique, on est naturellement conduit à chercher comment l'influence perturbatrice capitale, celle de Jupiter, aurait pu modifier l'excentricité et l'inclinaison au point de donner, aux trajectoires, des éléments actuellement aussi différents. Cette question est du plus haut intérêt, puisqu'elle touche directement à l'étude de la stabilité de l'anneau des astéroïdes, et l'on devait y appliquer, tout d'abord, les anciennes méthodes. Lagrange et Laplace avaient bien, en effet, démontré que, sous l'influence de leurs attractions mutuelles, les anciennes planètes ne sauraient éprouver, dans les valeurs de leurs éléments, que des variations comprises dans d'étroites limites : mais ce résultat, loin d'être établi d'une manière générale, n'était valable que pour certaines distances de ces planètes au Soleil.

Le Verrier a recherché les perturbations, sous l'influence de Jupiter, d'une petite planète dont on désirerait suivre les variations d'inclinaison, et le calcul l'a conduit à une conclusion très curieuse : si cette petite planète est sensiblement à une distance du Soleil égale à 2, elle se trouve, au point de vue de l'inclinaison, dans une sorte de région d'instabilité, c'est-à-dire qu'elle pourrait, sous l'action de Jupiter, acquérir de très fortes inclinaisons.

Malheureusement, dans cette région, l'anneau est très pauvre en petites planètes; elles sont récentes, peut-être insuffisamment connues, et les plus voisines sont :

	a.	*i.*
(434)	1,95	22°30′
(330)	2,09	19°59′
(323)	2,16	19°21′

qui ont, certes, de fortes inclinaisons, mais s'écartent assez rapidement de la limite indiquée par Le Verrier et ne peuvent donner à la théorie un contrôle suffisant.

Il y a donc le plus grand intérêt à rechercher d'autres zones d'instabilité, ou

du moins de très fortes perturbations, puisque celle-ci est impuissante à rendre compte des très fortes inclinaisons qui peuvent exister par ailleurs dans l'anneau ; et que, d'autre part, l'inclinaison est un élément de premier ordre en ce qui concerne la stabilité du système. Reprenant cette question d'une manière beaucoup plus délicate au point de vue analytique, Tisserand montre qu'il existe, entre Jupiter et le Soleil, une position telle que, si l'on y plaçait une petite masse dans une orbite peu inclinée sur celle de Jupiter, cette petite masse pourrait sortir de son orbite primitive et atteindre de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter, par l'action de cette planète et de Saturne. C'est une sorte de région d'instabilité pour les inclinaisons, et il est remarquable que cette distance soit à peu près le double de la distance de la Terre au Soleil, c'est-à-dire à la limite inférieure de la zone où l'on a rencontré jusqu'ici des petites planètes. Eros est largement en deçà de cette bande assez étroite d'instabilité, entre 1,98 et 2,08 pour l'axe, cas où l'inclinaison atteint aisément 25° : sorti de cette zone, on trouve environ 7° comme maximum d'inclinaison, inclinaison voisine de celle de Mercure, et c'est précisément le maximum expérimental que l'on obtient si l'on étudie les inclinaisons moyennes des petites planètes, classées par groupes suivant leurs grands axes. A la suite de Tisserand on trouve d'intéressantes remarques sur ce sujet par Radau, Idman, etc.

Ceci n'est pas sans nous apporter un enseignement précieux dont on eut le tort de ne pas se préoccuper durant ces dernière années : c'est qu'il y aurait le plus grand intérêt, au contraire de ce que l'on fait, à rechercher systématiquement des planètes à très fortes inclinaisons ; malheureusement elles sont moins nombreuses et, par objet utilitaire immédiat, les chercheurs explorent constamment, en principe, les régions les plus riches *a priori*.

Dans un but analogue, Tisserand a trouvé une région d'instabilité pour les excentricités, plus près encore du Soleil, à la distance 1,83 environ, fait au moins aussi important que la possibilité d'une grande variation dans les inclinaisons. Au reste, l'anneau ne s'étend malheureusement pas sur des régions aussi voisines du Soleil, et le calcul des perturbations s'est trouvé dans l'impossibilité, jusqu'ici, d'expliquer par la seule influence de Jupiter les fortes inclinaisons et grandes excentricités que l'on rencontre dans les orbites des planètes télescopiques ; il faudrait peut-être penser que ces singularités étaient au moins partiellement réalisées, dès l'origine, et que les conditions cosmogoniques qui ont présidé à la constitution des petites planètes n'étaient point identiques à celles qui se trouvaient effectuées pour les grosses planètes.

Or, sans doute pour des facilités théoriques, ce sont les nœuds et les périhélies qui ont été particulièrement étudiés jusqu'ici : ce que nous venons de dire

montre suffisamment qu'il y aurait une grande utilité, au contraire, à pouvoir aborder l'étude des rapports qui existent entre les trois éléments essentiels, grand axe, inclinaison et excentricité.

C'est bien ce que nous avons tenté d'esquisser d'après nos recherches statistiques, mais les résultats sont encore insuffisants. Dans cet ordre d'idées, cependant, Tisserand avait cru pouvoir indiquer que les fortes inclinaisons entraînent de grandes excentricités et, tant pour vérifier cette loi que pour en chercher la réciproque possible, nous avons étudié de près toutes les planètes qui présentent, pour ces deux éléments, des valeurs remarquables. Nous avons déjà signalé que, d'une manière générale, l'inclinaison varie dans le même sens que l'excentricité, mais néanmoins, au premier abord, une très forte excentricité ne paraît entraîner qu'une inclinaison assez moyenne, de 8° environ; de plus, nous avons noté une diminution très nette de fortes inclinaisons, surtout vers 13°, pour les planètes les plus rapprochées du Soleil, ce qui nous confirme l'utilité de cette étude et, une fois de plus, notre connaissance insuffisante de l'anneau vers ce bord pour contrôler le champ d'instabilité en inclinaisons.

Si, maintenant, nous étudions de près les planètes à très fortes inclinaisons, nous observons qu'elles s'accumulent légèrement vers les distances 2,7 et 3,1; mais, sauf nouvelle indication théorique, ce fait ne correspond qu'aux maxima de densité que nous avons signalés dans l'anneau aux environs des moyens mouvements 775″ et 645″. De plus, la forte inclinaison entraîne une forte excentricité.

Les planètes à très fortes excentricités sont peut-être encore plus curieuses : elles ont de fortes inclinaisons, mais, cela, de préférence sur les bords de l'anneau plutôt qu'en son centre. Ainsi, vers le milieu de l'anneau, à la distance 2,6 environ, il y a condensation de très fortes excentricités qui correspondent à de faibles inclinaisons, au-dessous de la normale, et l'on est là un peu plus près du Soleil que le maximum de densité de l'anneau vers 2,7.

En outre, la réciproque que nous cherchions est exacte :

Les grandes inclinaisons entraînent les fortes excentricités, et réciproquement.

LONGITUDES DES NŒUDS ET DES PÉRIHÉLIES.

Voyons rapidement ce qui se passe lorsque les petites planètes sont rangées par longitudes croissantes du nœud :

La longitude du nœud peut varier de 0° à 360°; elles sont particulièrement groupées vers les valeurs 356°, 157°, 212°, 7°, 10°, 31°, 76°, 124°, 136°, 142°,

146°, 160°, 202°, ... avec des lacunes importantes, comme dans l'intervalle 114°54′–120°49′;

On remarque des lacunes intéressantes près des nœuds ascendant et descendant de Jupiter;

Les recherches récentes tendent à combler les lacunes et à uniformiser la distribution des nœuds;

Il y a supériorité marquée de planètes anciennes dans les intervalles 0°-10°, 50°–70°, 190°–207°, 306°–327°, ...; et supériorité de planètes récentes dans les régions 24°–36°, 90°–102°, 132°–144°, 345°–360°, ...;

La distribution en moyens mouvements, ou distances au Soleil, varie alors très sensiblement suivant la longitude du nœud; de plus, les planètes ayant même longitude de nœud que Jupiter (99°) sont de préférence aux deux bords de l'anneau, le plus près et le plus loin possible de cette grosse planète, tandis que celles dont le nœud est à 90° de celui de Jupiter se maintiendront davantage au centre de l'anneau;

Pour une longitude de nœud égale à Ω_0 (Ω_0 = longitude du nœud de Jupiter), ou à $\Omega_0 + \frac{\pi}{2}$, deux minima de planètes à très faibles excentricités; minimum aussi dans les valeurs moyennes d'excentricité 0,09–0,144;

Pour la valeur Ω_0 encore, maximum de faibles inclinaisons et minimum absolu de fortes inclinaisons; condensation aussi, mais moins importante, de faibles inclinaisons autour de la valeur $\Omega_0 + \frac{\pi}{2}$;

Pour deux valeurs distantes de $\frac{\pi}{2}$, à 140° et 230°, maxima importants de fortes inclinaisons : de 131°15′ à 145°15′ aucune planète n'a une inclinaison inférieure à 4°30′;

Pour les planètes à très fortes inclinaisons, nous avions déjà trouvé minimum de longitudes de nœuds entre 0° et 90° : cela tient aux deux minima vers 5° et 65° pour les longitudes de nœuds, et la proposition est réciproque, pareille longitude n'entraînant pas de préférence une forte inclinaison;

Les très fortes inclinaisons déterminaient, au contraire, un maximum de planètes dont la longitude de nœud soit comprise entre 90° et 180° : la proposition est entièrement réciproque et une telle longitude détermine en effet, facilement, une très forte inclinaison;

Pour une valeur de 193° à 282°, en longitude de nœud, il y a maximum très net de planètes ayant pour longitudes périhélies une valeur de l'intervalle 270°–0°–90°;

Les planètes dont le nœud est voisin de celui de Jupiter ont souvent leur longitude périhélie supérieure à 260° — celle de Jupiter est 11°;

Pour une longitude de nœud variant de 32° à 50° absence complète de planètes dont la longitude périhélie soit comprise dans l'intervalle $-60°-+60°$.

Prenons rapidement les longitudes périhélies :

Il y a des condensations de longitudes périhélies au voisinage des valeurs 356°, 10°, 55°, 95°, 328°, 31°, 62°, 332°, ... et les lacunes sont moins étendues que pour les longitudes de nœuds;

Supériorité de planètes anciennes dans les intervalles 36°–51°, 96°–126°, 144°–154°, 162°–198°, 213°–225°, 300°–327°, ... et prédominance des planètes récentes vers 126°–147°, 255°–270°, 327°–342°, ...;

Si l'on compare aux moyens mouvements et que l'on se rappelle la longitude périhélie de Jupiter ($\varpi_0 = 11°$), on voit que le centre de l'anneau est particulièrement riche en petites planètes de longitudes périhélies, ϖ_0, 65°, $\varpi_0 + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, 135°, $\varpi_0 + 3\frac{\pi}{2}$, tandis que les bords sont fréquents en longitudes 255°, 300° et 355°, principalement le bord éloigné de Jupiter;

Or, dans l'intervalle 970″–1200″, et particulièrement de 975″ à 985″, il y avait tendance à longitude périhélie très élevée : la réciproque de cette proposition est donc vraie;

Pareillement, nous avons vu que, pour des excentricités supérieures à 0,200, et surtout 0,240, très peu de petites planètes avaient des longitudes périhélies comprises entre 90° et 270° : réciproquement, il y a très peu d'excentricités très fortes dans l'intervalle 101°–273° de longitudes, et même aussi très peu d'excentricités supérieures à 0,144 dans l'intervalle 159°–245°;

Maximum d'excentricités moyennes par une longitude périhélie de 79° à 273°, comprenant les valeurs $\varpi_0 + \frac{\pi}{2}$ et $\varpi_0 + \pi$;

Maximum de fortes excentricités dans les intervalles 29°–48°, 273°–321°, ce dernier renfermant la valeur $\varpi_0 + 3\frac{\pi}{2}$;

La longitude périhélie ne paraissait pas dépendre beaucoup de l'inclinaison; la dépendance inverse n'est guère mieux établie, tandis que l'influence du périhélie paraît assez nettement réagir sur le nœud.

Nous verrons ces notions se préciser par une autre voie dans un moment.

ROTATION DES ORBITES.

Mais, si la théorie reste impuissante à décider la contexture générale de l'anneau, elle va du moins tenter l'explication du groupement de certains élé-

ments, particulièrement, comme nous l'avons montré, les nœuds et les périhélies.

Newcomb explique, par l'effet des perturbations, la tendance des périhélies et des nœuds à se rapprocher du périhélie et du nœud de Jupiter, et recherche les relations mutuelles des orbites des petites planètes, calculs qui ont été poursuivis par Dorberck : d'ailleurs, ce groupement des nœuds des orbites sur l'écliptique ne serait, suivant Glauser, que la conséquence secondaire d'un fait plus général, à savoir la distribution uniforme de leurs nœuds sur l'orbite de Jupiter. Pour s'en rendre compte on peut, en première approximation, projeter les pôles des orbites sur l'écliptique, et l'on voit qu'ils s'y condensent tout autour du pôle de l'orbite de la grosse planète. Mais ce procédé rapide est insuffisant :

Alors, si l'on veut rendre compte de ces distributions par l'introduction des variations séculaires des orbites, il faudra, outre Jupiter, tenir compte de l'action de Saturne. Si, tout d'abord, on considère la seule perturbation de Jupiter, on voit que le pôle de chaque orbite doit circuler lentement autour de celui de Jupiter; la vitesse de rotation est constante, et telle, par exemple, que pour un axe égal à 2,3 la période soit environ de 6 000 ans. Or le calcul des probabilités indique que les planètes doivent être uniformément réparties dans tous les signes du zodiaque et, pareillement, le mécanisme que nous venons d'indiquer, vu la diversité des périodes, entraînera à la longue une répartition uniforme des nœuds sur la circonférence de l'orbite du corps troublant. Et si, maintenant, nous ajoutons l'influence perturbatrice de Saturne, cela revient à dire que le plan de l'orbite de Jupiter cesse d'être fixe : il faut alors considérer le mouvement relatif des nœuds par rapport au nœud de Saturne, et rapporter les équations différentielles à l'orbite mobile.

Tel est le processus suivi par Glauser pour obtenir une solution approchée de ce problème. Il reste à calculer la probabilité de la présence d'un pôle quelconque dans un des quatre quadrants de l'orbite de Jupiter, puis le nombre probable des pôles pour chaque quadrant, et l'application de ce procédé à un ensemble de 260 orbites fournit le résultat suivant :

Quadrant.	I.	II.	III.	IV.
Nombres probables.....	61	65	69	65
Nombres réels.....	54	72	71	63

L'influence de Saturne paraît bien troubler un peu l'uniformité de la distribution des pôles, et tendre à les grouper à l'opposite du pôle de Saturne; mais, ici encore, le résultat n'est guère sensible et paraît d'autant moins convaincant,

d'une manière absolue, que la variation des nombres réels n'est même pas toujours *dans le même sens* que celle des nombres probables.

N'oublions pas, d'ailleurs, que les faibles écarts d'une statistique avec les nombres théoriques sont d'une interprétation très délicate, car, notamment, les conditions particulières dans lesquelles se font la recherche et la découverte des petites planètes doivent avoir quelque influence sur le groupement apparent des orbites; nous avons eu déjà l'occasion de signaler cet inconvénient en disant que ces conditions diminuaient malheureusement d'une manière systématique le nombre des orbites à fortes inclinaisons.

Au reste nous avons reconnu, nous-mêmes, qu'il est impossible d'admettre, avec Glauser, une distribution uniforme des nœuds sur l'orbite de Jupiter; il était donc intéressant, à ce propos déjà, de rapporter toutes les orbites au plan de la grosse planète, ce que nous avons fait, comme il sera expliqué dans un instant. De plus, le calcul des probabilités, appliqué à des éléments plus nombreux, ne nous a pas permis de confirmer entièrement ces vues sur la répartition des pôles des orbites.

Enfin, il peut être intéressant de rechercher des relations linéaires entre les éléments d'une planète, soient le moyen mouvement et d'autres, soient, et plus facilement, les longitudes des nœuds et des périhélies, question captivante qu'étudia jadis Newcomb au moyen des équations pour les variations séculaires. Reprenant ce problème, Charlier montre que, pour un certain nombre d'astéroïdes, le périhélie doit osciller autour de celui de Jupiter : la statistique vient confirmer ce fait; mais, ici encore, la vérification n'est pas assez notable pour être définitive; et cela est regrettable, car nous verrons bientôt l'attrait d'une comparaison entre les petites planètes et les comètes périodiques, pour lesquelles les aphélies sont en majorité dirigés vers celui de Jupiter.

Ce sont là, une fois de plus, d'importantes questions auxquelles les recherches théoriques n'apportent pas de solution pleinement satisfaisante.

RÉPARTITION DE LA MASSE DE L'ANNEAU.

Laissons de côté, à l'origine, les difficultés supplémentaires que soulèvent les masses et qui, nous l'avons vu, sont loin d'être entièrement élucidées : on pourra alors, au point de vue des perturbations de l'anneau, considérer comme tout à fait indifférente la position qu'occupe chaque planète sur son orbite et, sans viser à un trop grand degré d'exactitude dans la description statistique de l'anneau, s'en rapporter aux éléments qui ont été déterminés pour chaque

planète — les petites erreurs seront vraisemblablement noyées dans la moyenne. Si donc on prend les six points d'intersection des orbites avec un trièdre trirectangle, que l'on détermine le centre de gravité de chaque groupe de points et que l'on représente ces six centres sur une orbite elliptique, on aura, avec A. Svedstrup, l'*orbite moyenne* de l'anneau; on peut ainsi adopter une orbite telle que la suivante :

i	6° 6′ 4″	ϖ	101°.47′.45″	1880,0
φ	1°36′38″	ω	328.20.42	
$\log a$	0,42218	Ω	133.27. 3	
a	2,6435			

Or, nous venons de le dire, il faut entièrement renoncer à calculer séparément l'influence de chaque astéroïde sur le mouvement des grandes planètes et des comètes : heureusement aussi nous savons que leurs masses sont insignifiantes et que l'on peut fort bien négliger les perturbations dues à chacune d'elles. Mais la question reste très douteuse, par contre, en ce qui concerne l'ensemble des perturbations de l'anneau; sans doute nous avons vu qu'il n'y a pas à craindre une action considérable sur les grosses planètes, mais les astéroïdes, dans leur ensemble, peuvent fort bien avoir une influence sensible sur les comètes les plus voisines. Et, ici, l'orbite moyenne que nous venons de définir devient insuffisante, car, pas plus sur elle que sur chaque orbite composante, la masse ne peut être supposée uniformément répartie; il faudrait, par exemple, adopter la notation de Gauss et remplacer chaque planète par six masses placées aux sommets d'un hexagone inscrit dans l'orbite. Il devient possible, à l'aide d'un tel procédé, de figurer l'anneau par une sorte de tore matériel à section variable — mais une pareille tentative dont il est permis d'attendre d'intéressants résultats, très longue eependant, sinon difficile, n'avait jamais été menée à bien jusqu'alors. Conformément à l'indication que nous avons donnée, nous verrons prochainement les conclusions que l'on en peut tirer.

D'ailleurs, si la détermination individuelle des masses est chose malaisée, comme nous l'avons vu à propos des recherches photométriques, il serait permis ici, en prenant quelques précautions, d'adopter les mesures d'éclats comme base de celles des diamètres, et les conclusions d'une pareille statistique auraient néanmoins une grande valeur, vu le nombre considérable des astéroïdes.

Il existe enfin une méthode élémentaire et fort élégante, due à Laisant, pour déterminer le centre de gravité de l'orbite d'une planète, en supposant la densité proportionnelle en chaque point à l'inverse de la vitesse, et c'est par là aussi qu'il faudra chercher, sans doute, à se faire une idée nette sur la répartition

moyenne des masses dans cet anneau, dont la dissymétrie pourra peut-être éclairer les questions si obscures de sa formation et de son origine. Matériellement, cela revient à supposer que la planète, dans sa course, abandonne *uniformément* une certaine quantité de matière qui se *fige* sur la trajectoire et forme ainsi un fil sans fin, une fois la révolution accomplie. Le centre de gravité en question est situé au milieu du segment compris entre le centre de l'orbite et le second foyer de celle-ci, c'est-à-dire le foyer qui n'est pas occupé par le Soleil; et ce résultat est facile à généraliser pour une orbite fermée quelconque, décrite sous l'effet d'une force centrale, car il n'est particulier, ni à l'attraction newtonienne, ni à une orbite elliptique.

ORBITES RAPPORTÉES A JUPITER.

Puisque l'on éprouve les plus grandes difficultés dans l'étude complète des astéroïdes et de leurs perturbations, nous avons pensé à rapporter toutes leurs orbites à celle de Jupiter, dont le rôle est évidemment prépondérant dans un calcul éventuel d'inégalités; et cela seul permettra une statistique sérieuse, au lieu, comme le font approximativement certains auteurs, de négliger l'inclinaison de Jupiter et de tout projeter sur le plan de l'écliptique. C'est ce que nous avons fait en résolvant simplement tous les triangles sphériques correspondants : les inclinaisons étant faibles, on ne devra introduire, autant que possible, que des tangentes dans la détermination des angles, obtenus à 1″ près, en prenant pour origine des longitudes le périhélie de Jupiter.

Il y aura lieu, à présent, de recommencer toutes les statistiques que nous avons faites par rapport à chaque élément, sans cependant entrer dans des descriptions complètes ou d'interminables comparaisons : selon la direction que chacun désire donner à sa recherche, ou la conclusion théorique qu'il s'agit de contrôler, il n'aura qu'à se reporter aux Tableaux détaillés que nous avons donnés.

Prenons donc de nouveau pour base le moyen mouvement croissant.

Les astéroïdes étant un peu plus nombreux que lors de notre précédent Mémoire, nos conclusions se trouvent confirmées en ce qui concerne la structure de l'anneau et la dissymétrie des lacunes;

Pour les excentricités, non modifiées, confirmation de nos résultats antérieurs;

Pour les inclinaisons, minima de très faibles inclinaisons (0°–4°) dans trois régions qui comprennent les commensurabilités simples $\frac{7}{3}n = 697''$, $\frac{8}{3}n = 797''$,

$3n = 897''$; maximum corrélatif et important dans la région $912''$–$947''$, qui paraît stable aussi pour les faibles excentricités;

Au contraire, la commensurabilité très simple $3n = 897''$ fournit des inclinaisons très fortes, supérieures à $11°30'$;

Les régions $623''$-$637''$ et $\frac{5}{2}n = 747''$ correspondent à des inclinaisons généralement fortes;

Enfin, nous confirmons encore que l'excentricité et l'inclinaison ont des variations parallèles, ce qui tend à rapprocher ces deux éléments quant à l'action de Jupiter;

Le grand axe influe peu sur la position du nœud, quand celui-ci est de $-\frac{\pi}{4}$ à $3\frac{\pi}{4}$ du périhélie de Jupiter;

Pour les planètes voisines de Jupiter, le nœud descendant est de préférence voisin du périhélie à Jupiter, tandis que le nœud ascendant n'est pour ainsi dire jamais à $-\frac{\pi}{2}$ de cette origine;

L'influence de Jupiter, plus sensible sur les périhélies que sur les nœuds, s'étend jusqu'au bord éloigné de l'anneau, où il existe un maximum important de faibles longitudes périhélies $315°$–$45°$;

Au même bord, absence de périhélies à $180°$ de celui de Jupiter;

Vers $720''$ maximum de faibles longitudes périhélies ($315°$–$45°$), précédant immédiatement un maximum de très faibles inclinaisons;

Au bord éloigné, encore, tendance vers $3\frac{\pi}{2}$ pour le périhélie, avec fréquence de la longitude des nœuds vers π;

Pour la région $676''$–$715''$, qui comprend la commensurabilité $\frac{7}{2}$, le périhélie se rapproche encore de celui de Jupiter ($315°$–$45°$), avec un minimum remarquable de périhélies dans l'intervalle $3\frac{\pi}{4} - 7\frac{\pi}{4}$.

EXCENTRICITÉS ET INCLINAISONS.

Prenons les excentricités croissantes :

Les parties les plus riches en excentricités 0,09–0,16 constituent le bord de l'anneau voisin de Jupiter, tandis que les très faibles et très fortes excentricités (particulièrement supérieures à 0,21) sont plus volontiers à l'autre bord de la couronne;

Les fortes excentricités entraînent de grandes inclinaisons;

Les faibles excentricités accompagnent de petites inclinaisons, cette loi étant cependant moins étendue que la précédente;

Les valeurs d'excentricité qui semblent de préférence influer sur la position du nœud sont, environ, 0,080, 0,090, 0,130, 0,140, 0,170–0,200;

Pour les périhélies, les variations sont brusques et complexes; elles sont plus mystérieuses encore que pour les longitudes de nœuds;

Si l'on admet que la perturbation de Jupiter soit de nature à augmenter l'excentricité, il en résulterait aussi que cette action tend à placer les périhélies en conjonction, fait qui serait très important lors des analogies avec les comètes;

Malgré son assez grande complication, la distribution des périhélies présente des singularités qui réclament une étude directe et approfondie.

Les inclinaisons croissantes indiquent à présent :

La distribution en inclinaisons par rapport à Jupiter est plus régulière que par rapport à l'écliptique; il est remarquable que l'anneau se trouve, pour ainsi dire, étendu, et que les régions enrichies ne soient pas celles du maximum absolu de densité, sauf 4°–6°, mais bien au contraire correspondent à des inclinaisons plus fortes, comprises entre 8° et 18°;

Maximum de densité à 23° et minima à 7° et 11°;

Les faibles inclinaisons enrichissent fort les bords extrêmes de l'anneau, tandis que la région centrale est particulièrement fournie pour les inclinaisons 1°54′–2°39′, 7°18′–8°48′, 10°53′–13°40′;

Le bord le plus éloigné de Jupiter est remarquable par les inclinaisons 2°39′–4°48′;

Rapprocher les faibles inclinaisons du bord voisin de Jupiter avec les faibles longitudes périhélies 315°–45° de cette région;

Maximum de petites excentricités, 0,000–0,144 pour les intervalles d'inclinaison 0°–4°14′ et 4°48′–8°13′;

Minimum important de très fortes excentricités pour des inclinaisons inférieures à 2°39′;

A partir de 12°, les fortes inclinaisons entraînent de grandes excentricités;

Dans la région très vaste 8°–22°, maximum de nœuds dans l'intervalle 135°–315°;

Vers 7°–8°, région moins riche en inclinaisons que lors des orbites par rapport à l'écliptique, maximum de longitudes de nœuds compris entre 315° et 135°;

Plus de nœuds voisins du périhélie de Jupiter pour les faibles inclinaisons que pour les grandes;

Diverses remarques du même ordre peuvent être faites pour la position du

périhélie, mais il faut particulièrement noter que, tant pour les périhélies que pour les nœuds, les variations sont beaucoup plus accentuées que celles que nous avions obtenues avec les orbites rapportées à la Terre;

Maximum intéressant de périhélies voisins de celui de Jupiter pour des inclinaisons de l'intervalle $7^{\circ}18'$–$13^{\circ}40'$.

NŒUDS ET PÉRIHÉLIES.

Cependant Jupiter, par sa masse considérable, joue un rôle prépondérant dans le système solaire, et il était naturel de choisir comme plan coordonné origine celui de son orbite. Ceci fait, il ne saurait être question de chercher une règle empirique pour trouver la répartition des cinq éléments elliptiques; d'autre part, devant une telle quantité de données, on perd de vue l'ensemble de la constitution de l'anneau : c'est pourquoi nous avons cru utile de grouper de plusieurs manières les nombres d'observation pour en déduire des Tableaux qui peuvent être un jour précieux, soit pour guider le calcul, soit pour vérifier les indications fournies, *a priori,* par la théorie. Et nous n'avons pas même pensé qu'il fût opportun de discuter ces Tableaux d'une manière complète, car ils se prêtent à une infinité de combinaisons selon la nature des renseignements que l'on en veut tirer : leur avantage est précisément d'éviter une description très longue, et il suffit de savoir où l'on peut les trouver tout faits.

D'ailleurs, l'examen rapide des travaux théoriques montre comment les efforts se sont particulièrement portés sur l'étude des longitudes des nœuds et des périhélies dans l'anneau : ceci légitime les quelques rapides indications que nous allons encore donner à ce sujet.

Prenons les planètes rangées par rapport à leurs longitudes de nœuds :

L'origine des longitudes étant toujours le périhélie de Jupiter, il y a minimum relatif de planètes pour des nœuds de 180°, et deux minima, encore plus importants, précédant les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$;

Un minimum à signaler vers 110°;

Maximum absolu important vers 330°, avant le périhélie de Jupiter;

Dans la région centrale des nœuds 203°–280°, minimum important de périhélies de la région centrale 45°–225°, et maximum de périhélies voisins de celui de Jupiter, vers 315°–45°;

Dans cette même région centrale, ainsi que dans la zone 133°–148°, se rencontrent les périhélies les plus voisins de celui de Jupiter;

Le bord de l'anneau voisin de Jupiter $400''$–$780''$ est particulièrement riche en

longitude de nœuds de l'une des zones 23°–76°, 107°–133°, 168°–186°; le second bord est fréquent en nœuds de 149° à 168°;

La zone 322°–330°, qui correspond au maximum de densité de l'anneau, est particulièrement riche en très faibles excentricités; de même pour 346°–358°, où il y a, au contraire, un minimum de longitudes de nœuds;

Zone 0°–23° riche en excentricités inférieures à 0,141;

La région 107°–133° est critique pour toutes les distributions des excentricités;

Fortes excentricités principalement vers 133°–149°.

Pour les inclinaisons il y a, dans la distribution, des variations brusques et intéressantes, notamment vers $\frac{\pi}{2}$, π et $3\frac{\pi}{2}$ comme longitude du nœud;

Maximum de fortes inclinaisons ($> 7°15'$) pour la région 303°–322° qui précède le maximum de densité de l'anneau.

Prenons maintenant le groupement suivant les longitudes périhélies :

Densités assez faibles aux environs de $\frac{\pi}{2}$, π et $3\frac{\pi}{2}$; par un phénomène analogue à celui de la dissymétrie des lacunes, la densité augmente en passant de $\left(\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon$ à $\left(\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon$;

Répartition des périhélies assez régulière, avec un minimum important à 180° de celui de Jupiter; minimum relatif vers $3\frac{\pi}{2}$;

Maximum très important de longitudes des nœuds dans l'intervalle 315°-135° pour des périhélies de l'une des zones 44°–57°, 132°–168°, 240°–260°.

Maximum de longitudes de nœuds de 45° à 225° pour des périhélies dans les intervalles 288°–308° et 340°–351°;

Maximum de longitudes des nœuds 135°–225° pour les périhélies de 320° à 13°;

Une fois de plus on constate que les maxima de densité ne correspondent pas aux fréquences des nœuds et des périhélies à $\pm\frac{\pi}{2}$ et π; mais les données numériques sont insuffisantes pour énoncer des conclusions fermes et la loi possible, qui a déjà donné lieu à de nombreuses recherches théoriques, n'est pas encore entièrement élucidée;

La région moyenne de l'anneau 680″–900″ est très nette pour les longitudes périhélies 540°–13°, 44°–57°, 103°–209°, 260°–288°;

Les condensations du même genre que l'on peut observer aux deux bords n'ont jamais une telle amplitude;

La longitude périhélie paraît influer beaucoup plus sur les petites excentri-

cités que sur les grandes : ainsi maximum sensible d'excentricité $\leq 0,144$ pour des périhélies de l'intervalle 57°–260° ;

Dans le cas des inclinaisons, les variations paraissent plus brusques et plus fantaisistes : au contraire des excentricités, la longitude périhélie semble plus influer sur les fortes inclinaisons que sur les petites.

ORBITES SUR L'ÉQUATEUR SOLAIRE.

Cependant l'hypothèse de Laplace sur l'origine du système solaire occupe bien des savants : il y a quelques années, encore, on sait que Faye a proposé d'y apporter des modifications profondes, tandis que, par ailleurs, C. Wolf s'est efforcé de montrer que les objections présentées contre cette hypothèse n'étaient pas irréfutables, et que les idées cosmogoniques de Laplace pouvaient être conservées dans ce qu'elles ont d'essentiel.

Or, à cet égard, l'anneau des petites planètes joue un rôle capital : il est clair qu'il tient lieu d'une planète unique plus importante dont les éléments n'ont pu se grouper, et cette sorte d'instabilité même, dans la condensation, est une épreuve délicate pour le mécanisme de la formation du système solaire.

C'est pour chercher de nouveaux arguments en faveur de l'hypothèse cosmogonique de Laplace que de Freycinet reprit dernièrement l'étude statistique des planètes télescopiques situées entre Mars et Jupiter. L'idée directrice de cette recherche consiste à admettre que la région occupée par les planètes est trop étendue pour que l'on puisse supposer qu'elles doivent, toutes, leur origine à un anneau unique, détaché à une certaine époque de la zone équatoriale du Soleil : on peut alors considérer comme plus probable que ces astéroïdes dérivent de plusieurs anneaux concentriques.

L'auteur rapporte alors les orbites à l'équation solaire; mais il y a là, déjà, une grosse objection à soulever, car, à cause de la formation des grosses planètes, l'inclinaison de ce plan n'est pas actuellement ce qu'elle était au moment de la formation des petites planètes. D'autres indéterminations pourraient être présentées en ce qui concerne la définition de ce plan équatorial et, avant de revenir sur les hypothèses cosmogoniques, nous pouvons maintenir ici — ce qui est conforme à l'opinion de Callandreau, très compétent en ces matières — qu'il nous paraît plus logique aujourd'hui, et beaucoup mieux défini, d'utiliser les orbites rapportées au plan de l'orbite de Jupiter.

D'ailleurs, il faut reconnaître que les conclusions déduites de cette étude par de Freycinet sont remarquables : la concordance est presque trop belle, si l'on

réfléchit à toutes les causes qui ont pu altérer les mouvements des planètes. Si ces résultats sont confirmés par les nouvelles découvertes, leur importance légitimera largement l'emploi de telles coordonnées; et, pour cela, il faudra notamment attendre que l'auteur publie le détail de sa méthode de calcul, ainsi que les orbites transformées qu'il a obtenues : le problème si ardu de l'anneau ne comportera jamais trop de données numériques précises.

Et si les questions de cosmogonie inspirent quelque défiance à certains esprits positifs, elles se posent néanmoins d'elles-mêmes, elles s'imposent incessamment en ce qui concerne les petites planètes, comme nous allons le voir dans un instant, et l'on voit mal pourquoi l'on s'interdirait de tenter leur résolution.

Dans ce genre de tentatives, il faut mentionner particulièrement Ch. d'Arloz qui a développé d'une façon très originale la théorie de Laplace et qui, sans aplanir toutes les difficultés, a, du moins, ouvert une voie nouvelle; et, enfin, les intéressantes idées de Zenger, ayant pour base ce fait que les mouvements planétaires et cométaires seraient harmoniques par rapport à la rotation du corps central.

Ainsi le nombre des petites planètes s'accroît constamment et il devient difficile de les suivre séparément par le calcul détaillé de leurs mouvements : bientôt le *Berliner Jahrbuch* est obligé de renoncer à la tâche qu'il s'était assignée : et l'Académie des Sciences de Danemark mit au concours pour 1884 la recherche statistique des astéroïdes considérés comme formant un anneau.

Depuis cette époque, le nombre de ces astres a plus que doublé : les premières études sont insuffisantes et il devient indispensable d'attaquer cette délicate question par tous les procédés possibles, plus ou moins détournés.

Sans doute, il serait encore plus vain de vouloir calculer leurs influences individuelles sur les mouvements des grandes planètes et des comètes; mais, heureusement ici, les masses sont assez insignifiantes pour que l'on puisse négliger entièrement les perturbations dues à chacune d'elles; une question très douteuse, par contre, est de savoir si ces perturbations, considérées dans leur ensemble, n'influent pas d'une manière sensible sur le mouvement des planètes et, surtout, sur les trajectoires des comètes les plus voisines. Nous avons assisté aux tentatives de ce genre; mais, pour que les recherches sur ce point puissent aboutir à un résultat certain, il faudrait d'abord connaître avec une certaine exactitude la forme et la situation de l'anneau formé autour du Soleil par toutes les petites planètes, ainsi que la distribution des masses dans cet anneau. Et, si restreinte que paraisse cette question, nous avons vu qu'elle était elle-même d'une résolution délicate et très laborieuse.

On est donc forcé de ne pas viser à un trop grand degré d'exactitude dans la description statistique de cet anneau : il conviendra alors de s'en rapporter aux éléments qui ont été déterminés pour chaque astéroïde d'une manière moyenne, quelque inexacts qu'ils puissent être; la position adoptée par une planète sur son orbite à un instant quelconque étant indifférente, on devra se préoccuper de la distribution des masses sans les répartir uniformément : adoptera-t-on alors, au choix, la division hexagonale de Gauss ou la distribution tout le long de l'orbite en raison inverse de la vitesse? C'est ce que nous pensons prochainement élucider en indiquant le meilleur choix. Enfin, en ce qui concerne les masses prises isolément, on sera obligé de s'appuyer sur les conclusions qui pourront être tirées de l'intensité lumineuse, pensant que le nombre des cas est considérable et qu'il est permis d'en espérer, en moyenne, un bon résultat; or, les travaux de Barnard nous ont montré de telles divergences que l'on pourrait encore se montrer sceptique et alors, cette fois, il est impossible de prévoir, dès à présent, comment on pourra tendre vers la connaissance individuelle de la masse.

Dans les recherches statistiques qui ont été faites, jusqu'ici, pour élucider la composition de cet anneau, quelques éléments seulement ont été considérés, dégagés de leurs liaisons avec les autres : et cela ne saurait être considéré comme satisfaisant. Puis, dans les études comme celle que nous venons de signaler, dans laquelle on rapporte les orbites à l'équateur solaire, une difficulté très grave a toujours été implicitement écartée pour n'être point abordée de front : par exemple, de ce que les petites planètes rangées suivant leurs distances moyennes se divisent en un certain nombre de groupes bien tranchés, il ne s'ensuit nullement que leur anneau autour du Soleil se résolve en un nombre correspondant d'anneaux à peu près concentriques.

Il n'en est même absolument rien; nous verrons donc, dans un instant, les nouvelles indications que l'on pourra tenter de chercher auprès des constantes de Tisserand, dans l'étude des distances aphélies et périhélies, etc.

ÉLÉMENTS ANALOGUES.

Quoique l'hypothèse d'Olbers soit désormais insuffisante pour expliquer une origine commune à toutes les petites planètes, nous rencontrons à chaque pas, dans cette étude, des indications qui tendent à faire admettre qu'il n'est pas impossible, et qu'il est même probable, que plusieurs d'entre elles constituent effectivement des fragments de masses primitives plus considérables; en parti-

culier, il en existe dont les orbites présentent des analogies curieuses, difficilement imputables au seul hasard, quasi-identité d'éléments qui doit se maintenir pendant encore fort longtemps.

La plus connue de ces analogies existe entre les orbites de (37) Fidès et (66) Maïa, qui ne diffèrent que par l'orientation du grand axe :

	a.	*e.*	*i.*	ϖ.	☊.
(37) Fidès.....	2,644	0,176	3°7′	66°26′	8°21′
(66) Maïa.....	2,645	0,175	3°6′	48° 8′	8°17′

Il existe cependant des cas où, sans être aussi semblables, tous les éléments sont assez voisins, comme pour :

	a.	*e.*	*i.*	ϖ.	☊.
(97) Clotho.....	2,671	0,255	12°	65°	161°
(3) Junon.....	2,668	0,258	13°	55°	171°

Enfin, parmi les nombreux astéroïdes, les analogies d'orbites seront très nombreuses et de tous genres; bien entendu, toutes n'offriront pas le même intérêt, suivant qu'il s'agisse de valeurs très fréquentes dans l'anneau pour certains éléments ou de valeurs, au contraire, assez rares; mais toutes, cependant, peuvent être consultées utilement pour la théorie, que l'on veuille étudier les actions mutuelles de deux astéroïdes qui viendraient à passer très près l'un de l'autre, ou que l'on cherche encore l'influence conservatrice de Jupiter par une telle analogie.

Ainsi deux planètes pourront suivre sensiblement la même trajectoire, par exemple :

	a.	*e.*	*i.*	☊.	ϖ.
(251) Sophie.....	3,10	0,09	10°29′	157°	80°16′
(318) Magdalena.....	3,19	0,07	10°33′	163°	80° 5′

D'autres astéroïdes auront des orbites homothétiques, comme :

	e.	*i.*	☊.	ϖ.
(210) Isabelle.....	0,12	5°18′	33°	44°
(271) Lucretia.....	0,13	5°19′	31°	45°

D'autres auront des orbites égales, de même inclinaison, mais diversement orientées; ainsi :

		a.	*e.*	*i.*
(263)	Dresda.....	2,8851	0,081	1°17′
(277)	Elvire.....	2,8849	0,089	1° 8′

ou simplement égales comme pour :

		a.	*e.*
(287)	Neptis.....	2,353	0,17386
(27)	Euterpe.....	2,347	0,17392
(256)	Walpurga.....	2,999	0,0649
(388)	Charybdis.....	2,995	0,0648
(366)	Vincentina.....	3,1439	0,067
(209)	Dido.....	3,1437	0,063

Aussi nous a-t-il paru intéressant, ailleurs, de réunir ainsi deux à deux les planètes ayant des éléments comparables : cela constitue certainement un document précieux que l'on pourra avoir à consulter dans le calcul des perturbations, soit pour rechercher si cette concordance augmente ou diminue sous l'influence de Jupiter, par exemple, soit pour étudier les actions de ces astéroïdes entre eux.

Nous avons donné des Tableaux détaillés des coïncidences les plus importantes entre les éléments des petites planètes et ceux des grosses planètes; puis nous avons vu qu'il existe un autre genre d'analogies plus intéressantes encore : ce sont celles qui ont lieu avec les comètes, et qui montrent que la distinction entre planètes et comètes, fondée sur la dissemblance des orbites, peut disparaître complètement. C'est là un point très important en ce qui concerne la genèse et l'évolution cométaires, ainsi que la possibilité d'origines communes entre ces astres et les petites planètes.

Nous ne donnerons pas ici d'autres exemples des cas très nombreux d'analogies que nous avons relevés et que l'on peut aisément consulter.

Cependant C. de Litrow et C. Linsser cherchent les rapprochements considérables de deux astéroïdes, les collisions possibles, et montrent la rareté d'une *conjonction physique;* nous avons dit que l'enrichissement considérable de l'anneau va singulièrement faciliter cette éventualité, et ce serait une question à reprendre : d'autant plus que déjà, dernièrement, sans cependant rentrer dans les cas de proximité qui nous intéressent et qui ont suscité une Note intéressante

de S.-J. Corrigan, les deux petites planètes (366) Vincentina et (386) Siegena passèrent dans le voisinage l'une de l'autre, déterminant les intéressantes recherches de E. Strömgren. Par ailleurs, nous avons vu que la théorie éprouve le besoin de faire des catégories dans l'anneau : la même nécessité se présente dans les recherches statistiques, dans l'étude des origines de ces astéroïdes; l'attention est appelée par Tisserand, Monck, Kirkwood, ... sur les groupes de petites planètes et sur les analogies de leurs éléments; à côté des recherches spéciales de Glauser, Charlier, ... Kirkwood cherche en vain à attribuer à l'influence de Saturne les anomalies dans la distribution générale des orbites.

Existait-il donc des points de condensation dans un anneau nébuleux?

Ce serait un point capital à élucider, qui a déjà suscité d'importants travaux de la part de d'Arrest, Maedler, Cooper, Lespiault, Burat, ... sans qu'il soit possible d'en tirer une conclusion formelle.

Nous allons voir que les groupements, qui vont de nouveau s'imposer, et les singularités rencontrées dans les études statistiques, tendent, en effet, à la reprise partielle de l'hypothèse d'Olbers avec des zones de condensation plus actives.

PROBABILITÉ DES COINCIDENCES.

Devant toutes les étrangetés qui résultent de la comparaison des orbites, nous nous sommes proposé de rechercher la probabilité pour que deux petites planètes aient un ou plusieurs éléments voisins; et, pour cela, nous supposons, dès le début, qu'aucune cause importante n'ait présidé à la distribution de leurs éléments, en un mot que toutes les combinaisons sont *également probables*, hypothèse *a priori* qui va nous permettre de traiter ce problème comme une question ordinaire de probabilités.

Pour appliquer le Calcul des Probabilités à la recherche des coïncidences d'éléments, en supposant que toutes les combinaisons sont *également probables*, la première méthode qui se présente est celle ordinairement suivie dans les cas très simples des jeux de hasard : si l'on imagine une urne renfermant des billes numérotées de 1 à n, et que l'on tire p de ces boules, on peut aisément chercher la probabilité pour que, parmi les numéros sortis, deux au moins aient une différence au plus égale à ε. Admettant un moment que les numéros marqués sur les boules correspondent aux valeurs possibles des moyens mouvements d'astéroïdes, on aurait la probabilité pour que les moyens mouvements de deux petites planètes diffèrent de moins de ε.

Ainsi posée, la question n'est pas d'une résolution théorique difficile, encore

que sa solution complète, en toute rigueur, entraîne à des calculs longs et fastidieux. D'ailleurs, on peut aisément s'apercevoir que le résultat dépend beaucoup du choix des unités, et l'assimilation du problème avec le tirage dans une urne n'est pas légitime si l'on veut y regarder de plus près : l'expression du moyen mouvement, par exemple, est essentiellement incommensurable, quand bien même la quantité ε ne le serait pas, et l'on devrait supposer que le nombre des numéros placés dans l'urne croisse indéfiniment pour arriver à se faire une idée limite d'une semblable définition.

Outre ces difficultés, le résultat ainsi obtenu manquerait de généralité et l'on devrait refaire le calcul numérique pour chaque cas, de sorte que, si la chose est possible pour un pareil problème, on se trouve conduit à définir, non par la probabilité, mais l'*espérance mathématique* d'un joueur qui eût spéculé, *a priori*, sur les coïncidences : cette espérance se définit, comme on sait, par le produit $p\,\mathrm{M}$, si p est la probabilité pour que l'événement favorable se produise, et M la somme qu'il doit rapporter, somme que nous supposons, bien entendu, égale à l'unité sans restreindre en quoi que ce soit la question.

Imaginons, par exemple, que les moyens mouvements soient régulièrement distribués dans un intervalle $0 - \alpha$, et demandons-nous quelle est la probabilité pour que deux d'entre eux aient une différence au plus égale à une quantité ε, déterminée à l'avance. Comme cette différence peut affecter toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à α la probabilité se trouve nécessairement égale au rapport $\frac{\varepsilon}{\alpha}$: la probabilité diminue, d'ailleurs, évidemment, si l'on suppose connu le premier de nos deux moyens mouvements; mais, au point de vue de l'espérance du joueur, le calcul doit être fait *a priori* et non point, si l'on peut dire, une fois la partie commencée, car alors ses chances partielles se modifient constamment.

Si l'on applique ceci à n tirages, dans l'hypothèse d'une répartition uniforme, l'espérance mathématique correspondante se trouve égale à

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\varepsilon}{\alpha},$$

ou sensiblement

$$\frac{n^2}{2}\,\frac{\varepsilon}{\alpha},$$

et le joueur aurait eu beau jeu, car les coïncidences se trouvent beaucoup plus fréquentes qu'il ne pouvait le penser.

Mais nous savons, d'autre part, qu'une répartition uniforme des moyens mou-

vements est loin de répondre à la constitution de l'anneau des astéroïdes et la divergence qui existe, en première approximation, entre l'expérience et la théorie, nous invite à considérer de plus près les nombres expérimentaux, car les coïncidences sont manifestement moins intéressantes, ont moins de poids, dans les régions de grande densité de l'anneau.

Rappelons donc, à cet égard, que l'espérance mathématique a pour expression

$$p_1 \mathrm{M}_1 + p_2 \mathrm{M}_2 + \ldots,$$

si les événements de probabilités p_1, p_2, ... donnent droit, respectivement, aux sommes M_1, M_2, ...; le joueur peut ainsi vendre ses droits aux diverses sommes, son bénéfice, si l'on veut, dans les régions distinctes de l'anneau.

Appliquons ceci au cas qui nous occupe : soit $\varphi(n)$ la densité de l'anneau pour la valeur n du moyen mouvement, de sorte qu'il y ait $(n'' - n')\,\varphi(n' \text{ ou } n'')$ petites planètes dont les moyens mouvements soient compris entre les deux valeurs voisines n' et n''. Dans ces intervalles réduits, nous pouvons désormais supposer que la distribution soit sensiblement uniforme pour évaluer la probabilité d'une coïncidence, et l'espérance élémentaire est alors, approximativement, égale à

$$\frac{1}{2}\,[(n'' - n')\,\varphi(n')]^2\,\frac{\varepsilon}{n'' - n'},$$

pour que les moyens mouvements de deux astéroïdes, dans l'intervalle considéré, aient une différence au plus égale à ε.

L'espérance totale pour l'anneau des astéroïdes a pour expression, par conséquent,

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon \int [\varphi(n)]^2\,dn,$$

l'intégrale étant prise entre les valeurs extrêmes possibles pour le moyen mouvement. D'ailleurs le nombre total des petites planètes est connu à l'avance : soit N ce nombre, et la fonction φ doit évidemment satisfaire à l'égalité

$$\int \varphi(n)\,dn = \mathrm{N},$$

l'intégrale étant prise entre les mêmes limites que précédemment. Si donc α et β sont les limites des valeurs possibles, et si la courbe

$$y = \varphi(x)$$

représente suffisamment la courbe des densités de l'anneau, en posant

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi\ x)dx = \mathrm{A}, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x)]^2\, dx = \mathrm{B},$$

l'espérance mathématique des coïncidences à ε près sera égale à

$$\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{A}^2}\mathrm{B}.$$

Nos premières recherches à ce sujet nous avaient fourni des résultats assez discordants, l'espérance paraissant très supérieure à l'expérience, et nous avions alors pensé que, si les astéroïdes peuvent avoir plusieurs origines communes, les perturbations séculaires de Jupiter pourraient tendre à diminuer les coïncidences.

Mais le choix de notre fonction φ était tel que nous avions intégré de o à $+\infty$ et de graves objections se présentent dans l'application du calcul des probabilités aux phénomènes naturels. Ne devrait-on pas, logiquement, supposer que les planètes puissent tourner indifféremment autour du Soleil, dans un sens et dans l'autre ? Toute autre serait alors la nature de la fonction représentative de la densité de l'anneau, nécessitant une intégration entre $\pm\infty$, et modifiant l'espérance mathématique.

Il y a donc lieu de voir si l'ambiguïté des hypothèses peut expliquer, à la rigueur, les discordances, ou s'il faut plutôt rechercher le principe des choses dans les raisons cosmogoniques de la nature; ou bien encore s'il faut attacher de l'importance aux écarts, en reprenant les calculs avec plus de précautions, pour interpréter les indications de la statistique.

C'est alors ce que nous avons essayé de faire.

Le choix de la fonction φ reste toujours arbitraire, et rien ne saurait indiquer quelle doit être sa forme : il est clair du reste que, suivant la nature même de cette fonction, on pourra changer un peu les limites α et β d'intégration pour éviter les irrégularités que peut présenter, sur les bords de l'anneau, une courbe capable de représenter assez bien, ailleurs, l'ensemble de sa conformation.

En outre, à mesure que l'on cherche la forme de l'anneau dans des intervalles plus petits, on est rapidement conduit à des courbes de plus en plus singulières dont la représentation analytique devient très malaisée, et ceci comporte deux graves inconvénients. Tout d'abord on introduit, pour plus de simplicité, des polynomes complexes φ, qui sont sans aucun rapport avec la distribution naturelle; de plus, le degré de ces polynomes est assez grand et, comme la variable x

doit pouvoir osciller entre des limites très étendues, les coefficients des polynomes sont des nombres considérables : les calculs logarithmiques ordinaires deviennent rapidement illusoires, sans compter, comme nous l'avons déjà dit, les variations rapides que peuvent subir de telles fonctions dès que l'on s'écarte des points pour lesquels on a pu les déterminer avec quelque précision.

Ce dernier inconvénient est beaucoup plus important que l'on ne saurait se le figurer en ce qui concerne le moyen mouvement, variant de 400″ à 1200″, et nous avons été souvent arrêtés par des impossibilités purement numériques pour effectuer les intégrations avec les Tables usuelles : il faudrait alors recourir directement à l'étude des axes, car, dès que φ atteint le cinquième degré, la grandeur des coefficients de φ^2 rend les résultats illusoires si l'on ne prend les plus grandes précautions.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

Cependant nos calculs ont été suffisamment concordants, certaines précautions ayant été prises dans le choix des fonctions, et les résultats sont assez homogènes. De plus nous avons établi que, au point de vue théorique, notre procédé d'approximation est satisfaisant et que, si le calcul numérique présente des longueurs inévitables et des difficultés considérables, on peut cependant arriver à des résultats assez précis pour qu'ils soient utilement comparables à l'expérience.

Qu'indique donc la statistique expérimentale?

Il faut d'abord aborder l'étude des éléments qui définissent la grandeur même de l'orbite, soit l'excentricité et le moyen mouvement, quantités indépendantes du système d'axes choisi; et nous ne devons pas oublier que l'espérance mathématique est proportionnelle à l'intervalle adopté ε. Si l'on cherche donc le rapport à ε du nombre des coïncidences correspondantes, on devrait obtenir des nombres constants : or, faisant varier ε dans de grandes proportions, la statistique montre que les quotients sont assez différents et, toujours, les indications fournies par les excentricités sont plus nettes que pour les moyens mouvements.

Puisqu'il y a là déjà une discordance, nous sommes conduits à rechercher s'il existe des régions particulières de l'anneau où la probabilité des coïncidences soit, par exemple, particulièrement en désaccord avec les nombres expérimentaux. Pour cela, il suffit de remarquer que la probabilité des coïncidences, définie comme nous l'avons fait précédemment, prise dans un intervalle de grandeur constante, α, quoique situé en une place quelconque de l'anneau, est pro-

portionnelle au carré du nombre des planètes (ou de la densité) dans l'intervalle choisi; et l'étude systématique de la distribution des coïncidences dans l'anneau nous a montré que leur nombre est loin d'être régulièrement proportionnel aux carrés des densités, surtout pour les excentricités. A mesure que la coïncidence s'améliore, c'est-à-dire que la latitude permise ε diminue, les cas favorables ne restent pas toujours dans les régions de densités maxima, ce qui eût été, cependant, *le plus probable*.

Toutes ces singularités, et leurs groupements mêmes, nous ont alors fait admettre qu'il ait existé quelque cause perturbatrice intervenant dans la distribution des coïncidences.

Que nous indique à présent la théorie?

Sans entrer ici dans le détail des calculs et des vérifications que nous avons donnés, nous pouvons dire que les nombres expérimentaux peuvent être pris pour exacts à quelques unités près, tandis que le nombre théorique est approché à une dizaine d'unités environ.

L'espérance mathématique d'une coïncidence à $1''$ près en moyens mouvements est 1/5, tandis que le nombre expérimental est 400.

L'espérance d'une coïncidence à 0,001 près en excentricité est 280 environ, et l'expérience en indique 550 au moins.

Il semble donc bien, jusqu'à présent, exister une raison cosmogonique qui prédispose aux coïncidences d'éléments dans l'anneau des astéroïdes, et cela plus particulièrement encore pour les moyens mouvements où les groupements s'écartent davantage aussi des carrés des densités.

Si l'on étudie pareillement les coïncidences en ce qui concerne les inclinaisons, les longitudes des nœuds et des périhélies, on observe notamment que : les coïncidences entre les inclinaisons sont moins fréquentes pour les orbites rapportées à Jupiter que pour les mêmes éléments écliptiques; relativement à l'écliptique, les coïncidences sont les mêmes pour les nœuds et les périhélies, tandis que, si l'on rapporte les astéroïdes au plan de Jupiter, il y a tendance à des coïncidences entre les périhélies plutôt qu'entre les nœuds.

D'ailleurs, les relevés que nous avons faits ne portent pas seulement sur les cas où deux éléments sont voisins : il peut y avoir intérêt à considérer les autres coïncidences où, simultanément, plusieurs éléments ont très sensiblement la même valeur. Quelle espérance pourrait-on donc fonder sur de semblables analogies?

Nous avons montré que, dans le cas assez complet des deux planètes (251) et (318), l'espérance ne dépassait pas la valeur très faible 0,000 005; et si l'on songe aux nombreuses et importantes similitudes d'orbites que nous avons

signalées, l'existence d'une action dirigeante sur ces coïncidences paraît hors de doute.

RELATION AVEC LES COMÈTES.

Ainsi, au fur et à mesure que les recherches récentes enrichissent l'anneau, l'attention des astronomes est appelée sur les lacunes : l'analyse des conditions du mouvement s'applique immédiatement à ces zones critiques, et l'opinion qui tend de plus en plus à prévaloir chez les géomètres, c'est que la stabilité dans la région des lacunes peut être affectée, sans doute, mais non entièrement détruite; et, par conséquent, il faudrait chercher, avec Newcomb, dans des raisons cosmogoniques, la cause de l'inégale répartition des petites planètes.

Puis l'étude des orbites prend une importance toute particulière au point de vue des analogies qu'elles pourraient présenter et, à cet égard, la théorie ne peut définir exactement le rôle de Jupiter pour savoir si son action perturbatrice doit tendre à augmenter, ou à diminuer, le nombre de ces coïncidences d'éléments. Nous rencontrons encore ici bien des singularités : il existe une fonction arbitraire, et la probabilité semble indépendante de la fonction choisie; cependant l'ensemble de nos recherches paraît mettre en évidence que les coïncidences d'éléments dans l'anneau des astéroïdes ne sont pas entièrement fortuites, et qu'une cause cosmogonique quelconque, peut-être bien l'action de Jupiter, doit avoir favorisé leur production.

D'autre part, si les ressemblances d'orbites ne paraissent pas purement accidentelles, c'est qu'il peut y avoir eu séparation d'objets après fragmentations, comme cela se rencontre dans le monde des comètes : et l'on est conduit à chercher, selon le pressentiment de Kirkwood, les analogies possibles entre les astéroïdes et les comètes. A cet égard nous avons fait remarquer que la spécialisation due à la nature de l'orbite doit être considérée comme inacceptable, et que l'on passe sans transition de l'un à l'autre genre.

Or H. Kreutz a découvert qu'un certain nombre de comètes appartiennent certainement à un corps unique qui se serait ultérieurement divisé : ses calculs ont principalement porté sur les comètes 1668, 1843 I, décembre 1872, 1880 I, 1882 II, 1887 I, et d'autres encore, dont les orbites se coupent en un point si rapproché du Soleil qu'il touche presque la couronne solaire elle-même. La comète 1882 s'est également fractionnée d'une manière analogue en quatre nouveaux astres périodiques, dont les orbites elliptiques sont parcourues respectivement en 670, 770, 880 et 960 années.

Il existerait donc des systèmes cométaires qui résulteraient de la segmentation

de comètes primitives, s'éparpillant de plus en plus le long de leurs orbites, et finissant probablement même par se désagréger complètement. C'est ce qui dut arriver pour la comète 1889 V, qui était accompagnée de quatre astres secondaires ; les satellites de cette comète s'étaient probablement détachés du noyau principal quand celui-ci, lors du passage de 1886, avait presque frôlé la surface de Jupiter. De plus, au retour de 1896, les compagnons avaient disparu : peut-être avaient-ils été capturés dans leur course — il est aussi fort possible qu'ils se soient résolus en essaims d'étoiles filantes, comme l'ont déjà fait de nombreuses comètes.

Ces questions importantes ont encore, à nos yeux, une autre conséquence très élevée : il devient de plus en plus improbable, en général, que l'origine des comètes soit extérieure à notre système — contrairement à l'opinion trop fréquemment admise aujourd'hui.

Par ailleurs, en ce qui concerne l'origine des comètes dont les périodes sont comprises entre celles de Mars et de Jupiter, nous sommes en présence de trois théories principales : la théorie de la capture par Jupiter; la théorie de l'explosion, activement soutenue par Proctor; enfin, l'hypothèse qui voit dans les comètes de simples astéroïdes ayant, plus que les autres, subi l'influence des perturbations de Jupiter : c'est l'opinion d'Alexander, acceptée par Kirkwood. La théorie de l'explosion soutenue par Olbers et Lagrange était considérée par ce dernier comme venant heureusement compléter l'hypothèse de la nébuleuse de Laplace : Faye la considère comme assez acceptable en ce qui concerne les astéroïdes et aussi les aérolithes, mais elle ne semble pas confirmée par les faits relatifs aux comètes.

Nous sommes donc fatalement conduits à des rapprochements entre les planètes et les comètes : or, ici, la théorie va se montrer impuissante à traiter la question dans toute sa généralité et il faut recourir à des artifices statistiques, à des études locales. On peut, par exemple, étudier la distribution des nœuds de toutes les orbites sur l'écliptique : en divisant la circonférence de l'écliptique en parties égales, en comptant les nœuds d'orbites contenus dans chacun de ces intervalles, on pourra voir si la distribution de ces points dans les diverses régions est conforme au calcul des probabilités, peut être considérée comme le résultat du hasard, ou si quelque influence particulière a dû se faire sentir dans cette répartition. J. Kleiber a pu croire, de la sorte, que la distribution des nœuds est purement fortuite, aussi bien pour les petites planètes que pour les comètes. Au contraire, si l'on prend les orbites des essaims météoriques, on trouve que les chiffres probables et les chiffres réels sont en désaccord : ceci peut au reste s'expliquer par l'existence d'une cause de condensation qui dépend

de la périodicité annuelle dans la fréquence des étoiles filantes, due au mouvement de la Terre dans son orbite.

Luc Picart, dans un travail remarquable, a entrepris d'étudier, d'une façon aussi rigoureuse que possible, la formation des courants météoriques qui, d'après la théorie généralement admise, donnent naissance au chutes d'étoiles filantes. L'auteur considère donc un système de corps de masses très petites, soumises seulement à leurs attractions mutuelles et à l'attraction du Soleil; il donne les conditions de stabilité suffisantes pour la stabilité d'un essaim de corpuscules sur une orbite circulaire, ce qui rend compte des condensations secondaires pour des particules dont les conditions initiales sont voisines de la stabilité, en tant que position et vitesse; il étudie la désagrégation de l'essaim le long de l'orbite primitive, et les relations qui subsistent entre les particules isolées, mais d'origines voisines. C'est là une importante contribution à des problèmes de même ordre que les questions de groupement dont nous montrons l'existence très probable à divers points de vue.

Tous ces enseignements sont d'autant plus troublants que les essaims météoriques paraissent avoir d'indispensables liens avec les petites planètes et avec les comètes. De plus, la raison invoquée dans la distribution des nœuds qui concorderait avec les nombres probables n'est aucunement décisive, non plus que la fréquence des grandeurs d'intervalles qui séparent les petites planètes : et parce que les recherches n'ont porté que sur des nombres assez restreints, et parce que des distributions manifestement anormales pourraient laisser subsister l'accord entre les nombres probables et les chiffres observés. Puis les nœuds sont très nettement accumulés au voisinage du point vernal, et ne faut-il pas rapprocher ce fait des études théoriques de Newcomb sur la distribution des nœuds et des périhélies ? Enfin, des faits plus complets signalés par J. Holetschek viennent indiquer que la Terre joue elle-même un rôle important dans le cas des comètes, comme pour les étoiles filantes; et ce groupement systématique de certains éléments des orbites cométaires paraît surtout tenir à des causes terrestres, conditions d'observation, ...

Cette connexité entre les comètes et les essaims météoriques permet de se demander combien il peut y avoir, approximativement, de météores télescopiques, puisque ceux-ci peuvent intervenir, à la rigueur, dans la mesure de la masse globale de l'anneau. Or, pendant les nuits qu'il a passées l'œil à la lunette de l'Observatoire Lowell (États-Unis), See estime qu'il a noté en moyenne cinq météores, par nuit, traversant le champ : un calcul facile donne alors 600 millions pour le nombre des météores que l'atmosphère terrestre reçoit dans une soirée, soit un total d'environ 1200 millions par jour. M. Newton avait estimé

ce total à 12 à 15 millions pour les météores visibles à l'œil nu, soit une proportion de 1 : 100; mais il est probable que ces évaluations sont encore bien au-dessous de la vérité.

Quelles ne peuvent pas être les conséquences d'un pareil flux de matière, et au point de vue astronomique, et au point de vue météorologique?

Et, si les essaims météoriques ont en général des excentricités assez élevées, nous savons également que la partie de l'excentricité qui dépend des perturbations, dans le cas des petites planètes, peut souvent dépasser la partie fixe de l'excentricité, indépendante de ces mêmes perturbations : n'est-ce pas par l'accroissement considérable de ces excentricités que nous passons notamment, sans transition, des uns aux autres de ces corps célestes? Et cette forte perturbation de l'excentricité n'a-t-elle pas deux conséquences encore : tout d'abord une planète déjà observée peut avoir été perdue par suite d'une orbite trop modifiée ou, ce qui revient au même, un nouvel astéroïde trouvé, à éléments distincts en apparence, n'est-il pas identique à un autre? En second lieu, la répercussion de cette excentricité variable est immédiate sur l'éclat de la planète : un astre peut être invisible dans une période d'excentricité minimum, et visible au voisinage du périhélie lors d'un maximum d'excentricité. Quels sont ainsi les centres perdus... ou retrouvés?

En outre, nous avons eu l'occasion de signaler que les conditions mêmes dans lesquelles s'effectue la recherche des petites planètes écartent, malheureusement, certains groupes, comme celui des fortes inclinaisons, d'une manière systématique; et nous voici conduits, de nouveau, à rechercher le rôle de la Terre elle-même dans notre connaissance de l'anneau. Puisqu'il est impossible d'apprécier numériquement les conditions de la découverte, cela revient à dire, du moins, qu'il pourrait être utile de considérer comme un élément même de l'orbite, en quelque sorte, la date d'apparition de l'astéroïde correspondant; et, en effet, prenant l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1903, on constate, avec Ed. Maillet, que le nombre des planètes télescopiques découvertes, chaque mois, à partir de janvier, est de

38 43 60 41 31 17 21 44 78 52 52 27

depuis l'origine, ou encore de

24 18 38 6 7 4 7 13 32 22 26 22

depuis 1890 inclus. Ces chiffres indiquent deux maxima très nets en mars et en septembre, deux minima en juillet et décembre.

Voilà posée une question qui réclame une solution précise; à l'aide de la statistique, de raisons tirées de l'organisation des observatoires, de l'état du ciel et des conditions météorologiques, de la durée de la nuit, ... peut-on expliquer les résultats de cette statistique d'une manière satisfaisante, soit depuis l'origine, soit depuis 1890 seulement? Ou bien faut-il recourir à d'autres arguments, invoquer des dispositions personnelles, des raisons de température ou de pression, de saison si l'on veut, permettant de conclure, même seulement en partie, comme Lombroso? Celui-ci, en effet, d'une statistique analogue, déduit que les facultés d'invention et d'observation des astronomes doivent mieux fonctionner aux moments des maxima que lors des minima : et comment se fait-il alors que, pour les découvertes effectuées depuis 1890, le minimum d'été seul soit bien net, les maxima de mars et septembre subsistant encore?

Quelle est donc l'importance, dans le cas des astéroïdes, de toutes les causes que nous venons d'indiquer très rapidement? Et jusqu'à quel point peut-on considérer tel ou tel de leurs éléments comme arbitrairement distribué, ou soumis à une cause perturbatrice?

Les recherches, et théoriques, et statistiques, n'ont encore pu donner que d'imparfaites réponses à ces questions capitales.

CRITÉRIUM DE TISSERAND.

Mais, pour nous efforcer d'élucider ces questions si délicates et si complexes, il nous faut reprendre, avec un peu plus de détails, la discussion des calculs nombreux et fort longs auxquels nous avons soumis les éléments des planètes, ce que nous allons partiellement effectuer ici, en nous appliquant principalement à en faire comprendre l'origine et la portée.

On sait que les éléments elliptiques d'une comète peuvent éprouver des variations considérables sous l'influence des perturbations d'une grosse planète telle que Jupiter et, après avoir observé deux comètes à éléments différents, il faut des calculs longs et souvent inutiles avant de reconnaître si l'on est en présence d'une seule et même comète, troublée en réalité par l'action de Jupiter. Il était précieux de pouvoir décider, *a priori*, si deux systèmes d'éléments peuvent, ou ne peuvent pas, correspondre à un même astre, et c'est ce qu'a recherché Tisserand pour le problème suivant :

Un astre P, *de masse évanouissante, est troublé par une planète* P′ *qui décrit un cercle de rayon a′ autour du Soleil.*

Si l'on désigne par a, p, i, le demi-grand axe, le paramètre et l'inclinaison de

l'orbite troublée par rapport au plan de l'orbite planétaire, Jupiter par exemple, et que l'on fasse application de l'intégrale de Jacobi, on trouve, avant et après l'entrée de l'astre dans la sphère d'activité,

$$\frac{1}{a} + \frac{2\sqrt{p}\cos i}{a'^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{K} = \text{const.}$$

Tel est le beau critérium de Tisserand, sous forme de condition nécessaire d'identité, origine de remarquables travaux sur la capture des comètes dans le système solaire. On peut en étendre encore la portée en supposant que l'orbite de Jupiter n'est pas circulaire, mais qu'elle se rapproche d'un cercle au moment des grandes perturbations, soit que la planète se trouve vers son aphélie ou vers son périhélie, ce qui légitime les efforts que nous avons tentés pour rechercher l'influence de ces deux points sur la constitution générale de l'anneau; on peut aussi, avec Callandreau, tenir compte de l'excentricité de Jupiter. Enfin, dans cet ordre d'idées, les travaux de Schulhof font autorité : l'auteur a montré qu'il y avait, dans le cas des perturbations, trois relations entre les anciens éléments et les nouveaux, dont deux approximatives seulement, tandis que la troisième est presque rigoureusement exacte et résulte du critérium de Tisserand.

Certainement les planètes, à proprement parler, n'entrent pas dans la sphère d'activité de Jupiter, et la constante de Tisserand n'a pas, pour elles, d'existence physique aussi capitale; néanmoins, si les liens entre les comètes et Jupiter sont généralement acceptés, il ne paraît pas douteux également que cette planète influe sur la distribution des astéroïdes et l'on a, dans ce cas, l'avantage de pouvoir entièrement négliger l'excentricité de Jupiter dont les perturbations se sont présentées, successivement, pour toutes les positions sur l'orbite.

Après avoir rapporté, comme nous l'avons fait, les petites planètes au plan de l'orbite de Jupiter, nous avons donc pensé qu'il pouvait être utile de calculer les valeurs correspondantes de la constante K; on trouve ainsi des valeurs comprises entre 0,567 et 0,708, tandis que, pour les comètes, on obtenait l'intervalle 0,475 à 0,580. Nous sommes là en présence de deux zones numériques qui empiètent l'une sur l'autre : et l'on ne saurait trop insister sur ce fait, puisque nous avons eu déjà l'occasion de signaler ailleurs des genres d'analogies fort intéressantes, à savoir celles qui ont lieu entre les comètes et les planètes, et montrent assez que toute distinction entre ces astres, fondée sur la dissemblance des orbites, doit aujourd'hui disparaître complètement. Ainsi les petites planètes et les comètes périodiques, que l'on ne peut plus différencier que par leur aspect physique, ne sont peut-être souvent que des masses à des états plus ou moins

avancés : en tout cas, la transition continue des unes aux autres est une preuve suffisante qu'elles sont susceptibles d'origines communes, ou semblables, d'actions perturbatrices de même nature, et vient nous confirmer l'utilité d'appliquer, aux unes comme aux autres, l'intégrale de Jacobi.

Jusqu'ici, lorsque, pour deux comètes différentes, on trouvait des valeurs de K concordantes au millième, on était tenté de conclure à leur identité; pour les planètes, nous sommes en présence de coïncidences bien plus singulières encore, à six décimales communes, et, relativement, ces coïncidences sont plus parfaites que celles que l'on peut rencontrer entre les autres éléments planétaires. D'ailleurs, si l'on passe insensiblement des comètes aux planètes par diminution des inclinaisons et des excentricités, la transition est ici ménagée une fois de plus; on savait, dans le cas des comètes, l'existence de condensations particulières dans les distances aphélies et dans les longitudes $\varpi - \Omega$; affaiblies, il est vrai, ces propriétés se retrouvent intégralement chez les planètes. Voilà autant d'éléments nouveaux dont il faut apprécier l'importance, de même qu'il serait utile d'étudier plus en détail les points de proximité maximum des diverses orbites; aussi bien, par rapport aux valeurs de K, les grands axes et les distances aphélies semblent se distribuer nettement, tandis que les autres éléments paraissent éprouver une influence secondaire.

Enfin, une grande distance aphélie comme celle de la planète (361) Bononia, de 4,772, rapproche beaucoup cet astre de l'orbite de Jupiter, tandis qu'à l'autre bord de l'anneau c'est l'influence de Mars qui peut devenir prépondérante : plusieurs planètes, en effet, s'approchent du Soleil plus que Mars (sans compter celles dont les orbites sont entièrement intérieures) principalement (323) Brucia, découverte par Max Wolf, et dont la distance périhélie est 1,564, tandis que la distance aphélie de Mars est 1,666.

Sans pouvoir indiquer ici de détails trop abondants, nous pensons en avoir dit assez, cependant, pour montrer que le problème de l'anneau des petites planètes se complique encore, puisque de nouveaux éléments numériques entrent en jeu dans la discussion, à savoir l'inverse de l'axe, le paramètre, les distances aphélie et périhélie, la longitude $\omega - \Omega$. En outre, nous sommes conduits à voir comment se groupent par rapport aux valeurs de la constante K les anciens éléments déjà étudiés, pour approcher autant que possible le mécanisme suivant lequel les particules se détachent de la nébuleuse, l'invariant étant donné à la conjonction avec Jupiter; et, dans les coïncidences d'invariants les plus remarquables, nous trouvons une distance aphélie moyenne égale à 3,292 tandis que la distance correspondant au rapport de commensurabilité $\frac{1}{2}$ serait 3,277. C'est là un rapprochement important.

Cependant, tandis que les axes et les distances aphélies paraissent soumis à des lois précises, les distances périhélies et les autres éléments semblent plus capricieux et leur étude ne peut manquer d'être délicate. En outre, les excentricités moyennes des groupes remarquables sont sensiblement supérieures à la moyenne, et ce nous est une raison de plus pour imaginer que Jupiter sut créer dans la nébuleuse en condensation des marées considérables pour que la crête en pût se séparer.

Mais, dans cette voie, nous ne pouvons nous arrêter là sans nous demander s'il n'avait pas existé dès lors, à l'origine, des groupements assez importants qui, comme les étoiles filantes, se seraient lentement disséminés dans toute la couronne, et nous avons déjà été conduits, précédemment, à cette même hypothèse. Dans ces conditions il était indispensable de calculer la valeur de la constante K, en donnant diverses valeurs à l'axe a' de la masse perturbatrice, ce que nous avons également effectué. Et nous y étions d'autant plus engagés qu'il nous fallut déjà faire des réserves sur le rôle de la planète Mars : si elle ne crée pas d'importantes lacunes dans l'anneau des astéroïdes, son influence paraît cependant sensible sur le bord le plus voisin du Soleil, et sur sa constitution. Enfin, dans les régions riches, certains groupements, passant très près les uns des autres, eussent pu se perturber, et c'est bien à une telle action de l'anneau sur lui-même que nous paraissons devoir aboutir.

En résumé, la constitution de l'anneau des petites planètes comporterait trois causes très différentes : tout d'abord l'action de Jupiter, action prépondérante sur la contexture de l'ensemble; puis, dans les singularités, on peut trouver la trace de l'influence de Mars et d'une action de l'anneau sur lui-même. C'est pourquoi, pour chaque planète, nous avons calculé la constante de Tisserand en donnant à la quantité a' cinq valeurs distinctes qui correspondent à l'axe de Jupiter, au bord de l'anneau éloigné du Soleil, au centre de l'anneau, c'est-à-dire à la région très dense, au bord voisin de Mars et à l'axe de la planète Mars : ce sont toutes ces données numériques k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, dans l'ordre que nous venons de dire pour a', c'est-à-dire pour les valeurs 5,2028, 4,4, 2,7, 2,0, 1,52369 que nous avons classées et étudiées dans leurs rapports avec les éléments déjà connus.

PERTURBATIONS PÉRIODIQUES.

On voit donc l'importance des études relatives aux petites planètes, tant au point de vue cosmogonique qu'à celui des perturbations prépondérantes de Jupiter et, en poursuivant cette étude rapide, nous n'aurions guère à revenir sur

les remarquables travaux de A. Féraud, dont certains cas particuliers touchent précisément de très près à des singularités dans les constantes de Tisserand ; étant donnée, cependant, la perte cruelle que vient de faire la Science en la personne de ce jeune astronome si distingué, on nous permettra de nous étendre un peu plus qu'il ne serait indispensable sur ce sujet en reproduisant ci-après une analyse succincte que la *Revue générale des Sciences* publiait dernièrement à propos de ses récentes recherches.

Quel que soit le système adopté pour les coordonnées, nous avons nettement émis l'opinion qu'il faudrait toujours subdiviser l'anneau en 3, 6, ... régions limitées et définies par les relations de commensurabilité, suivant l'ordre infinitésimal auquel on veut s'arrêter ; ceci nous fait entrer directement dans les vues de Kirkwood relativement au rôle de Jupiter, créateur de marées dans la nébuleuse solaire en voie de condensation, et susceptible d'arracher des anneaux successifs. De cette façon, si M. de Freycinet croit devoir diviser l'anneau en 3 ou 5 régions arbitraires et rapporter les planètes au plan de l'équateur solaire, nous avons trouvé plus logique, avec M. J. Mascart, dans ses études statistiques, de les rapporter au plan de l'orbite de Jupiter, planète troublante essentielle.

D'autre part, au point de vue des perturbations, S. Newcomb et Doberck ont trouvé une tendance des périhélies et des nœuds à se rapprocher du périhélie et du nœud de Jupiter ; et cependant la statistique ne révèle pas de pareilles condensations d'une manière sensible. La question est fort importante puisqu'elle est connexe au développement de la fonction perturbatrice, développement qui sera possible ou non d'une façon convergente, qui introduira des termes strictement périodiques ou bien encore des termes séculaires.

C'est dans cette voie que M. A. Féraud a fait d'importantes études dont on peut trouver les résultats à diverses reprises dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et dans les *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*. Voici la position de la question : la partie principale $\frac{1}{\Delta}$ de la fonction perturbatrice a pour expression

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{m,m'} M^{i(ml+m'l')} = \sum B_{m,m'} E^{i(m\varphi+m'\varphi')},$$

Δ étant la distance de deux planètes dont φ, φ', l, l' sont les anomalies excentriques et moyennes. Les coefficients A et B ont pour expressions

$$4\pi^2 A_{m,m'} = \int\int \frac{dx\,dy\,VE^{\otimes}}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta}, \qquad 4\pi^2 B_{m,m'} = \int\int \frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta},$$

prises le long des circonférences $|x| = 1$ et $|y| = 1$.

Si les quantités a, a', ϖ, ϖ', valeurs des grands axes et de l'angle de la ligne périhélie avec la ligne des nœuds, sont considérées comme données, les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ sont alors des fonctions des excentricités et de l'inclinaison mutuelle J des deux orbites; ces fonctions peuvent être développées suivant les puissances des excentricités et de sinJ, ou encore suivant les puissances des excentricités et de $\sin^2\frac{J}{2}$ et $\cos^2\frac{J}{2}$.

M. Féraud s'est proposé, précisément, de rechercher les conditions de convergence de ces développements dans les deux hypothèses suivantes :

1° Lorsque, l'une des orbites étant circulaire et l'autre elliptique, le grand axe de l'orbite elliptique est confondu avec la ligne des nœuds;

2° Lorsque, l'une des orbites étant circulaire et l'autre elliptique, le grand axe de l'orbite elliptique est perpendiculaire à la ligne des nœuds.

Les principes de la solution de pareils problèmes ont été indiqués par M. Poincaré dans le Tome XV du *Bulletin astronomique;* le savant géomètre montre d'abord que les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison, que les limites de convergence de ces développements sont les mêmes pour les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$, et que ces limites sont les mêmes pour tous ces coefficients, quels que soient les entiers m et m', puis il établit les valeurs critiques des excentricités et de l'inclinaison.

Ainsi, les deux problèmes que se pose M. Féraud ont été traités en vue de l'application aux petites planètes dont les orbites remplissent sensiblement les conditions théoriques qu'ils supposent; dans ces deux hypothèses, la distance des deux astres présente de précieuses symétries, on peut supposer nulle l'excentricité de Jupiter, et nous nous trouvons en présence d'une heureuse application des éléments des orbites rapportés au plan de Jupiter, comme cela était logique.

34 petites planètes offrent sensiblement les conditions du premier problème : pour chacune d'elles les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ sont développables suivant les puissances de l'excentricité et de sin J, à l'intérieur des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons l'excentricité et la valeur de sin J relatives à la planète.

Le second problème correspond approximativement à 61 astéroïdes : pour 58 d'entre eux les développements de $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ suivant les puissances de l'excentricité et de sin J peuvent être effectuées dans les mêmes conditions que précédemment. Pour les trois dernières planètes, (183), (225) et (361), ces mêmes coefficients peuvent être développés suivant les puissances de l'excentricité, de $\sin^2\frac{J}{2}$ et de $\cos^2\frac{J}{2}$, par toutes les valeurs de l'angle J et à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon l'excentricité de la planète.

Tels sont les importants résultats obtenus : M. Féraud est un des rares astro-

nomes, en France du moins, qui s'efforcent d'appliquer les nouvelles méthodes de la mécanique céleste. L'intérêt de ses recherches et l'élégance des résultats acquis prouvent assez l'utilité qu'il y aurait à rompre un peu plus avec l'ancienne routine.

GÉNÉRALITÉS SUR LES CONSTANTES.

Mais avant d'aller plus loin dans l'étude détaillée de ces constantes, il est utile de séparer un élément important, la quantité $\frac{1}{a}$, commune à toutes les valeurs de K : elle joue, en effet, un rôle très spécial, variant, tantôt dans le même sens que la constante, tantôt en sens inverse, suivant la distance de la masse perturbatrice fictive. Cependant, comme nous avons étudié ailleurs la façon dont se comportent les autres éléments quand on range les planètes par moyens mouvements croissants, il faut principalement s'attacher à l'étude des coïncidences les plus remarquables, observant en détail les orbites relatives à chaque groupe intéressant, pour faire d'utiles comparaisons avec les mêmes quantités correspondantes aux diverses valeurs de K. D'ailleurs, et surtout pour les petites valeurs de $\frac{1}{a}$, ce n'est pas dans des orbites analogues que l'on rencontre ces coïncidences, et c'est là un fait digne de remarque que les analogies se produisent, de préférence, entre des orbites très différentes comme valeurs d'excentricités et d'inclinaisons; outre les singularités que met en relief l'étude détaillée, on peut généralement noter une tendance à l'augmentation dans le nombre des coïncidences, au fur et à mesure que l'amplitude permise diminue.

Nous arrivons à l'étude des constantes K elles-mêmes, et nous devons indiquer ici l'ordre et la distribution, le rôle des différents documents qu'il peut être utile de fournir. En donnant les Tableaux complets, ce à quoi nous ne pouvons songer ici, on peut se dispenser de toute discussion, ce qui permet de laisser à chacun le soin de les examiner, de les interpréter et d'en apprécier la valeur suivant le point de vue auquel il se place. Souvent, en effet, une indication théorique ne permet pas d'introduire un Tableau d'une façon exclusive; c'est par comparaison de plusieurs d'entre eux que l'on peut obtenir un résultat, et le lecteur se trouve plus libre de faire aisément ce travail suivant le but cherché.

On sait d'ailleurs comment sont constituées ces statistiques. On range les petites planètes par K croissants, par exemple, puis on les classe en groupes pour voir, dans chaque groupe, combien d'astéroïdes ont un élément compris entre certaines limites : et c'est précisément ce que nous avons fait pour l'axe, l'excen-

tricité, les distances aphélies et périhélies, l'inclinaison, les longitudes du nœud et du périhélie, et la différence de ces deux derniers nombres.

Pour ne pas allonger inutilement, on peut omettre de comparer entre elles les diverses valeurs de K dans de pareils Tableaux; mais, en revanche, nous avons cru utile de voir l'influence du périhélie de Jupiter, pris pour origine des longitudes, et ceci nous amène à examiner le voisinage des valeurs 0°, 90°, 180°, 270°. Ces points sont très particuliers : ils correspondent, pour le problème des trois corps, aux cas où les deux corps les moins importants ont une orbite circulaire et une orbite elliptique, l'axe de l'orbite elliptique étant confondu avec la ligne des nœuds ou perpendiculaire à cette ligne. Or, dans ce cas, grâce à certaines symétries, on peut démontrer que les coefficients de la fonction perturbatrice sont développables en séries convergentes, soit par rapport à l'excentricité et à $\sin i$, soit par rapport à l'excentricité et aux quantités $\sin^2 \frac{i}{2}$ et $\cos^2 \frac{i}{2}$.

Enfin il a été précieux de réunir toutes les conclusions relatives à chaque élément, de grouper, par exemple, toutes les singularités de la distance aphélie, ou de tout autre élément, pour diverses valeurs de K croissantes; mais, encore une fois, la discussion peut être évitée par des Tableaux d'ensemble dont nous laissons à chacun l'interprétation, et qui sont publiés ailleurs.

Cependant, pour chaque valeur de K, nous avons indiqué quelle était la constitution de l'anneau en donnant des listes de densités avec courbes représentatives : cette distribution est très importante, car, par ses singularités multiples, elle rappelle la distribution des moyens mouvements, et les lacunes. De plus, si l'on veut comparer entre elles toutes les courbes en les rapportant à une même échelle, on s'aperçoit que l'allure de l'anneau est fort différente en passant d'une valeur à une autre; il n'y a aucune analogie dans la succession des maxima et minima. Ceci prouve encore suffisamment le peu d'arbitraire qui règne dans la répartition des constantes, hasard qui se traduirait par une courbe assez régulière avec un seul maximum important qui correspondrait aux valeurs moyennes et les plus fréquentes des éléments.

D'ailleurs, dans cet ordre d'idées, l'attention doit être appelée sur les valeurs isolées que l'on rencontre aux deux bords, dans les distributions, d'autant plus que quelques-unes d'entre elles appartiennent aux cas convergents étudiés par A. Féraud et, à ce propos, il serait du plus grand intérêt de voir comment se comportent ces cas convergents dans les coïncidences et analogies d'orbites au point de vue de la permanence ou de la création ultérieure de ces singularités; de plus un certain nombre de valeurs isolées se présentent en groupes curieux, et non absolument disséminées. Alors, si l'on écarte les valeurs isolées, on réduit

l'amplitude de la valeur K, et, en opérant d'une manière analogue de K_1 à K_5, on voit immédiatement que cette réduction porte sur des fractions de l'intervalle total égales à $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; une fois de plus nous rencontrons l'influence de Jupiter pour le groupement de ces constantes, en même temps que notre attention est appelée sur la dissémination extrême qui règne dans la constante relative au centre de l'anneau, et dont nous allons retrouver l'origine.

Mais cette amplitude elle-même, différence entre les valeurs extrêmes de K, mérite un examen un peu plus complet : égale à 0,140 pour k_1, qui correspond à Jupiter, elle va sans cesse en augmentant pour atteindre la valeur 0,624 avec k_5, lorsque la masse perturbatrice se rapproche du Soleil jusqu'à la distance de Mars. Considérons donc la valeur

$$K = \frac{1}{a} + 2\sqrt{p}\frac{\cos i}{\alpha^{\frac{3}{2}}},$$

et imaginons que les éléments peu importants de cette formule, l'excentricité et l'inclinaison, aient les valeurs moyennes, de beaucoup les plus fréquentes dans l'anneau; on aura alors

$$K = \frac{1}{a} + 1,96\frac{\sqrt{a}}{\alpha^{\frac{3}{2}}},$$

et, sous cette forme, il devient immédiat de voir si K est croissant ou décroissant, car

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{0,98}{\alpha^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\left(\frac{0,99}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Si donc l'on a $\alpha > 0,99a$, la dérivée est négative, K est décroissant, c'est-à-dire que l'axe varie en sens inverse de la constante; l'axe varie au contraire dans le même sens que la constante si l'on a $\alpha < 0,99\,a$. Or les valeurs de α correspondant aux bords de l'anneau sont 2,0 et 4,4, tandis que les petites planètes extrêmes ont pour $\frac{1}{2}$ grand axe 2,09 et 4,26; ainsi k_1 et k_2 rentrent bien dans le cas où la première égalité est constamment vérifiée, k_4 et k_5 dans le cas de la seconde inégalité. Le cas où la dérivée serait nulle ne correspond à aucune réalité puisqu'il faut donner à α des valeurs différentes; pour k_3, au centre de l'anneau, distance 2,7, la dérivée est tantôt positive, tantôt négative, d'où le trouble apparent des Tableaux relatifs à cette valeur, et qui demandent aussi à être regardés avec un plus grand soin.

Il est encore une autre conclusion à en tirer : sans doute il n'existe aucune valeur de α pour laquelle la constante K soit indépendante de l'axe a, mais,

d'après ce qui précède, pour chaque valeur de K, l'amplitude de la variation de la constante sera

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \cos i \frac{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}}{\alpha^{\frac{3}{2}}},$$

en désignant par $a_1(p_1)$, $a_2(p_2)$ le plus petit et le plus grand axe de l'anneau, l'excentricité et inclinaison ayant des valeurs voisines de la normale.

Autrement dit, la courbe

$$y = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + 2\cos i \frac{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

doit correspondre à l'amplitude des diverses constantes, et les représenter, sauf bien entendu d'une façon rigoureuse en ce qui concerne le centre de l'anneau, car y s'annule pour la valeur $x = 2{,}95$ et nous savons qu'aucune valeur de x ne saurait rendre égales toutes les constantes. Cependant, dans ce centre même, pour les axes croissants, la valeur de k_3 est d'abord décroissante, puis croissante, et il est aisé de calculer numériquement que son amplitude maxima n'est pas considérable. Alors, si nous traçons cette courbe et que, sur les ordonnées correspondantes, nous marquions par des petits cercles les points qui correspondent aux amplitudes observées pour k_5, k_4, k_3, k_2 et k_1, on voit que, sauf une faible différence pour Jupiter, les écarts sont toujours beaucoup plus grands que les ordonnées de la courbe, c'est-à-dire que la variation des constantes est toujours beaucoup plus forte qu'on ne l'eût pu attendre *a priori*.

Enfin il ne faudrait pas croire que la différence entre les prévisions et la pratique s'explique tout naturellement par la variété dans l'excentricité et dans l'inclinaison; il arrive bien, en effet, sur le bord, que les valeurs extrêmes pour k correspondent à de très fortes ou à de très faibles inclinaisons, mais il existe un autre genre d'anomalies : certaines planètes paraissent présenter des éléments singuliers, et se retrouvent comme planètes isolées et éloignées pour plusieurs valeurs de α, de façon que si l'on envisage les bords de l'anneau pour les diverses constantes, à part des acquisitions nouvelles inhérentes précisément à la valeur de α, on trouve, plus ou moins dérangées, un fonds de petites planètes singulières, dont aucun élément, à proprement parler, ne saurait faire prévoir la classification à cet endroit — et dont il serait peut-être utile de faire une étude plus spéciale.

Il nous reste à voir les analogies très étroites, les coïncidences inexplicables que

vont encore présenter ici les astéroïdes et si, pour les diverses valeurs de k, nous formons les groupes de ces coïncidences importantes, que nous prenions toujours la moyenne des distances aphélies alors observées, nous trouvons respectivement, pour k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, les nombres 3,217, 3,196, 3,121, 3,064 et 3,113. Les variations inattendues de ces nombres *moyens*, dans ce cas particulier pris pour exemple, prouvent une fois de plus le peu d'arbitraire qui règne dans les coïncidences et l'utilité de leur étude.

ÉTUDE DE k_1.

Bien entendu, on observe, dans la distribution des grands axes, une répartition moyenne assez régulière, de telle sorte que l'axe varie en raison inverse de la constante; cependant il faut prendre garde à trois exceptions qui correspondent à des planètes singulières, venant troubler l'ordre naturel, et il sera utile de voir, dans leur théorie, si rien ne saurait expliquer cette anomalie. De plus, il faut faire une remarque essentielle qui correspond au groupement des densités élevées, avec des arrêts brusques pour tomber à des nombres bien inférieurs, et l'on comprendra mieux encore l'importance de cette observation en voyant qu'elle est beaucoup plus nette pour les axes extrêmes, c'est-à-dire que les bords de l'anneau ne paraissent pas se comporter comme sa région moyenne ou riche. Reste à savoir si c'est par pauvreté, précisément, ou pour quelque raison mécanique.

Comme pour l'axe, l'excentricité qui intervient dans le paramètre de la formule devrait varier en sens inverse de la constante : or cette loi n'apparaît nullement dans les statistiques, et il faudra se rapporter au rôle de l'inclinaison pour savoir si, réellement, l'intervention de l'excentricité n'est pas très active, ou bien si c'est le second terme lui-même de la constante qui n'est pas très important. Il faut remarquer, cependant, un minimum de faibles excentricités pour le voisinage de la valeur $k_1 = 0{,}665$, et des minima de fortes excentricités autour des valeurs $k_1 = 0{,}643$ et $k_1 = 0{,}656$.

La combinaison des deux éléments précédents va nous fournir des renseignements sur les groupements des distances aphélie et périhélie. Pour la distance aphélie, la distribution est d'une grande régularité au bord de l'anneau opposé à Jupiter; nous ne trouvons plus qu'une des trois singularités signalées pour le grand axe et, pour la valeur $k_1 = 0{,}656$, nous avons un saut brusque qui correspond bien à la prédominance des faibles excentricités.

Par ailleurs, les condensations sont moins régulières et beaucoup plus étendues que dans le cas du grand axe.

Les distances périhélies sont beaucoup plus capricieuses : elles ne reproduisent plus que très vaguement la disposition des grands axes, et l'on retrouve trois singularités pour les très faibles distances. En étudiant les choses de plus près, il faudrait voir s'il n'y a pas là un indice de l'influence perturbatrice de Jupiter sur cet élément.

L'inclinaison devrait encore varier en sens inverse de la constante et, sans être très nette, une pareille distribution est cependant plus claire que pour les excentricités : on peut donc en conclure, d'abord, que l'influence du second terme n'est pas considérable sur la constante, et, en second lieu, que l'excentricité est davantage soumise aux perturbations que l'inclinaison. Après quoi, il nous suffira de signaler une pénurie singulière de faibles inclinaisons pour une valeur de la constante comprise entre 0,619 et 0,630.

Pour les longitudes des nœuds, nous avons un minimum de longitudes entre 45° et 225° au voisinage de la valeur 0,673, tandis que, pour la valeur voisine 0,665, est un important minimum de longitudes périhélies dans le même intervalle 45°-225°, de même que pour les valeurs 0,610. Les densités sont ici très capricieuses et il est inutile d'en donner une description complète; c'est guidé par une indication théorique, ou par un autre élément, que l'on pourra plus fructueusement encore les examiner. En même temps on trouvera profit à consulter la répartition de la différence $\pi - \Omega$: elle paraît assez régulière dans l'intervalle 315°-225° et, au contraire, très irrégulière dans la région opposée, et les indications de cet élément peuvent offrir le plus grand intérêt.

Quant à l'influence de la position du périhélie de Jupiter, elle paraît assez irrégulièrement sur la distribution des nœuds, et une discussion plus utile sera guidée en ayant déjà pour base la connaissance d'une singularité de quelque autre élément; pour les périhélies, au contraire, leur distribution paraît très régulière à 270° de celui de Jupiter et, en outre, pour les périhélies voisins de celui de Jupiter, en condensation pour la valeur $k_1 = 0{,}665$, et aussi dans l'intervalle 0,625 — 0,640.

Enfin la quantité $\varpi - \Omega$ est très particulièrement voisine de 90° pour l'entourage de la valeur $k_1 = 0{,}648$ et la discussion approfondie de sa distribution comporte la même observation que celle des longitudes des nœuds par rapport à la position du périhélie de Jupiter.

ÉTUDE DE k_2.

Nous sommes ici au bord de l'anneau des astéroïdes, c'est-à-dire avec une masse perturbatrice fictive située à la distance 4,4 du Soleil. Comme pour les

valeurs k_1, nous trouvons que l'axe varie en sens inverse de la constante; et, cependant, les groupements sont déjà un peu moins condensés, tandis que d'importantes exceptions apparaissent plus nombreuses et dans tous les groupes. D'ailleurs il y a des sauts moins brusques dans l'échelle des densités, de sorte que les limitations signalées pour la valeur de k_1 paraissent dues beaucoup plus à l'influence de Jupiter qu'à la pauvreté même des extrémités de l'anneau. Comme précédemment, c'est à la théorie, ou du moins à d'autres singularités aussi, qu'il faudra demander l'explication des anomalies que nous nous contenterons de signaler rapidement dans les différents groupes.

Si les excentricités doivent varier en raison inverse de la constante, nous voyons qu'il n'y a guère de progrès depuis la valeur k_1; la distribution reste assez vague et cet élément ne paraît pas encore prendre, dans la constante, une importance aussi grande que celle de l'inclinaison. Cependant il faut signaler que, dans la même région relative que pour k_1, c'est-à-dire pour $k_2 = 0{,}739$, nous avons un minimum important de faibles excentricités; même remarque pour les plus faibles valeurs de k_2. Enfin les très fortes excentricités sont extrêmement rares tout de suite après le maximum des fortes excentricités.

Pour les distances aphélies, nous trouvons une distribution qui ressemble à celle des valeurs k_1. Cependant, au bord même de l'anneau où nous nous trouvons, le plus voisin de Jupiter, la condensation considérable des plus grandes distances aphélies est encore plus nette, tandis qu'elle paraît un peu plus étalée dans la région moyenne de l'anneau. La distribution est aussi un peu plus diffuse que pour les grands axes; enfin, au minimum de faibles excentricités, vers $k_2 = 0{,}739$, correspond une variation brusque, maximum de très faibles distances aphélies, puis, dans le second groupe, maximum correspondant à celui des fortes excentricités avec un arrêt brusque immédiatement après.

Les distances périhélies sont encore plus capricieuses, bien qu'elles reproduisent, en gros, l'allure des grands axes; cependant il faut observer que la distribution du quatrième groupe est beaucoup mieux condensée, comme dans le cas des distances aphélies et que, de plus, le troisième groupe se singularise encore : particulièrement dans la même zone critique pour les excentricités où il se présente un maximum avec arrêt brusque.

Déjà, en arrivant à ce bord de l'anneau, nous rencontrons des inclinaisons mieux groupées que pour la constante k_1 : Jupiter paraît donc bien avoir réagi sur les inclinaisons. Cependant, vers la valeur $k_2 = 0{,}707$, nous trouvons encore peu de faibles inclinaisons, tandis que les plus fortes inclinaisons se réunissent assez bien aux très petites valeurs de la constante.

La distribution des nœuds paraît fort arbitraire; au reste, il fallait un peu le

prévoir, et cette statistique ne pourra être fructueuse qu'en venant confirmer une autre indication théorique : le deuxième groupe présente un seul maximum, et net, tandis que le quatrième paraît le plus régulier. Observations du même genre pour les distances périhélies : le groupe le plus régulier paraissant être le premier, et le plus irrégulier serait le troisième. Enfin, la quantité $\varpi - \Omega$ présente *a priori* un très grand désordre, mais elle reflète son indication propre qui peut être très utile, en même temps que les singularités des deux éléments précédents.

Si l'on veut tenir compte de la position du périhélie du corps troublant, nous voyons, pour ce bord de l'anneau, que l'action de Jupiter est encore marquée et ne saurait être négligée dès la première approximation : du moins les nœuds le manifestent nettement pour le voisinage des valeurs 0° et 180°, tandis que la chose est plus sensible, pour les périhélies, aux environs de 0° et 90° — cette dernière valeur intéressant encore la différence $\varpi - \Omega$. Encore une fois, nous n'entrons pas dans les détails des observations, détails qui devraient venir compléter d'autres indications.

ÉTUDE DE k_3.

Cette constante est relative au centre même de l'anneau, à la région la plus riche, d'axe 2,7, et, en vertu de ce que nous avons dit sur la valeur moyenne des constantes, nous avons dépassé la région critique où toutes ces constantes devraient être égales. Les singularités des divers groupes n'apparaissent plus, mais cela tient à une cause beaucoup plus importante : ayant dépassé la zone critique, nous devrions avoir une variation parallèle entre l'axe et la constante. Or ce phénomène est à peine dessiné par les trois derniers groupes, tandis qu'il est absolument opposé à l'allure du premier : ainsi l'on pourrait nettement conclure que la région riche de l'anneau agit d'une manière sensible sur les planètes intérieures, et que cette hypothèse est d'autant plus légitime que les autres groupes sont très lâches, très irréguliers, presque semblables à une distribution arbitraire ou à une zone d'instabilité, ce qui permet de songer déjà à une action perturbatrice effective de l'anneau sur lui-même.

Nous voyons cette fois les excentricités se singulariser conformément aux prévisions, et cela surtout sur les bords de l'anneau, où les séparations sont beaucoup plus nettes qu'au milieu. Il faudra encore étudier séparément les exceptions, mais cette distribution entraîne deux conséquences : la première,

c'est que l'ordre relatif à k_1, surprenant *a priori*, doit réellement avoir été déterminé par l'action perturbatrice de Jupiter; et, en second lieu, si la distribution des excentricités est ici beaucoup plus nette sur les bords qu'au centre, c'est que, dans la région riche, certaines planètes passent assez près les unes des autres pour s'influencer mutuellement et troubler un ordre régulier. Les deux déductions seraient très importantes, et la seconde nous ramène à l'idée de l'action de l'anneau sur lui-même.

Les distances aphélies offrent ici une distribution moins régulière que pour les autres valeurs de k, et le troisième groupe, particulièrement, paraît arbitrairement distribué; cependant la distance aphélie semble varier dans le même sens que la constante, les zones sont plus étalées, et l'on retrouve des petites singularités qui correspondent à celles des excentricités.

Les distances périhélies, généralement si capricieuses, se mettent déjà à accuser ici nettement une variation en sens inverse des constantes; l'anneau semble d'ailleurs toujours avoir une action sur lui-même et les condensations des valeurs extrêmes sont beaucoup plus nettes que celles de la région centrale.

Cette fois, nous trouvons des inclinaisons qui varient correctement en sens inverse de la constante; les régions sont parfois un peu étendues et nous apercevons bien des singularités dont il faudra rechercher l'origine, mais nous sommes néanmoins en présence de la distribution la plus nette qui existe pour toutes les valeurs de k.

C'est déjà en possession d'une autre indication qu'il faudra entrer dans les statistiques relatives aux nœuds et aux périhélies; cependant la longitude du nœud semble avoir une tendance à varier en sens inverse de la constante, principalement dans les trois premiers groupes, tandis que le troisième groupe se distingue encore des autres par l'irrégularité des longitudes périhélies; le premier et le troisième groupes sont d'ailleurs les plus irréguliers en ce qui concerne la quantité $\varpi - \Omega$, mais nous n'insisterons pas sur les diverses variations de ces quantités qu'il pourra être utile de consulter.

On peut encore constater tout d'abord que, en dehors de l'influence du périhélie du corps troublant, périhélie moyen inconnu, l'influence de celui de Jupiter paraît diminuer dans le cas actuel, et quelques singularités observées dans les cas précédents sont ici plus étalées, plus diffuses. Cependant, pour la position des nœuds, on devra s'attacher à expliquer les maxima des deuxième et troisième groupes, tandis que les périhélies voisins de 0° paraissent les plus intéressants, et que la différence $\varpi - \Omega$ présente les plus fortes variations, pour l'intervalle qui comprend 90°.

ÉTUDE DE k_4.

Nous arrivons au second bord de l'anneau, le plus rapproché du Soleil, à la distance 2,0; le second terme de la formule prend une importance de plus en plus grande sur la valeur définitive de la constante, mais la distribution des grands axes devrait se régulariser avec une variation de même sens que celle de la constante. Or, si la chose est fort acceptable pour les deux derniers groupes, il n'en est pas de même dans les deux premiers; donc, ici encore, le bord intérieur de l'anneau paraît plus troublé que le bord externe et, dans le premier groupe, il nous est impossible de ne pas signaler la lointaine singularité qui correspond aux constantes les plus élevées. D'ailleurs les bords de l'anneau se distinguent encore de sa région centrale et riche, pour laquelle la distribution est très lâche et répartie dans toutes les valeurs; et les délimitations, même pour les bords extrêmes, sont beaucoup moins marquées que dans le cas de Jupiter, moins nettes encore que pour la constante k_2.

Pour les constantes k_4, les excentricités se distribuent encore assez bien en ordre inverse des constantes; il n'y a pas grand'chose à dire de particulier sur ce bord de l'anneau, dont on pourra étudier les singularités; mais, si l'on compare la succession des densités à celle des valeurs k_3, on voit une plus grande extension, en même temps qu'une analogie, qui nous confirment dans les deux influences perturbatrices soupçonnées sur la distribution des excentricités : celle de Jupiter et celle de l'anneau.

Les distances aphélies se mettent bien à varier en sens inverse de la constante, mais les condensations sont peu importantes; de plus, au bord de l'anneau éloigné de Jupiter, nous trouvons le même retard que pour les grands axes, le troisième groupe paraît affecté d'une distribution arbitraire et les plus fortes distances aphélies, elles-mêmes, ne semblent offrir de condensation stable que pour les constantes les plus élevées.

Les condensations des distances périhélies s'accentuent pour cette valeur de la constante, et les groupements varient bien en raison inverse de la constante; cependant il faudrait découvrir la perturbation qui engendre les cas isolés, notamment dans les deuxième et quatrième groupes.

Les inclinaisons ne fournissent plus qu'une indication assez vague; les groupements sont beaucoup moins nets que pour le centre de l'anneau, k_3, et plus arbitraires encore que pour l'autre bord, k_2. Il faut observer toutefois que, comme toujours, la meilleure répartition s'observe dans les plus fortes in-

clinaisons, à quelques anomalies lointaines près et sur lesquelles il faudrait revenir.

Le bord de l'anneau offre une étrange distribution pour les longitudes des nœuds; trois groupes, mais surtout les deux premiers, sont fort irréguliers, tandis que les nœuds paraissent bien distribués de 135° à 225°. Il faut noter l'important minimum du premier groupe dans les petites valeurs de la constante. Au contraire, c'est le troisième groupe qui présentera les variations les plus élevées en ce qui concerne les longitudes périhélies. Mais nous n'insisterons pas sur toutes ces particularités, non plus que pour l'élément $\varpi - \Omega$, car, pour l'instant, l'intérêt de cette statistique n'est pas dans un usage exclusif, et il n'y faudra chercher d'indications que guidé par un autre phénomène.

On ne connaît évidemment point la position moyenne du périhélie du corps troublant et il n'est pas sûr que celui de Jupiter ait une action sur la distribution des orbites dans cette région lointaine de l'anneau. Ainsi, tant que les recherches ne seront pas guidées par une autre singularité, il n'y a lieu de signaler ici que le fait suivant : c'est aux environs de 0° que l'on rencontre les variations les plus intéressantes dans les longitudes des nœuds et des périhélies.

ÉTUDE DE k_3.

Quelle sera maintenant l'influence d'une planète telle que Mars sur la répartition des grands axes? Malgré que le second terme de la constante soit extrêmement important, la distribution est plus nette et moins éparpillée que dans les valeurs précédentes : du moins le fait est très net pour le bord le plus rapproché de l'anneau, avec arrêt brusque, et nous y retrouvons encore cette planète singulière, très éloignée, dont il faudrait reprendre l'étude particulière avec soin. Au reste, pour les plus petites valeurs de la constante, nous trouvons que le premier groupe est relativement pauvre, étant égal au troisième; ce dernier est le plus étendu, avec le moins de singularités. Les planètes très éloignées de Mars présentent au contraire de nombreuses dissidences : ainsi Mars paraît encore agir assez nettement sur les deux bords de l'anneau.

Mars ne semble véritablement pas avoir une grande influence sur les excentricités, du moins dans l'ensemble de l'anneau. Mais il paraît en être autrement au bord le plus voisin de cette planète, et il pourrait être utile alors de mettre en jeu la grande condensation de très fortes excentricités dans les plus faibles valeurs de la constante.

Pour Mars, les distances aphélies vont présenter la même distribution très lâche que pour les valeurs précédentes de la constante; cependant cette planète semble agir sur les plus faibles distances, qui sont mieux groupées; le troisième groupe paraît encore beaucoup plus arbitraire que les autres, tandis que le dernier ne se condense nettement que pour les constantes les plus élevées.

Les distances périhélies sont bien groupées sous l'influence de Mars, et la région centrale, elle-même, n'est pas trop étalée : la condensation la meilleure est aux plus faibles distances, et l'on devra chercher analytiquement l'origine des singularités que présentent trois des groupes dans des valeurs éloignées.

Mars paraît avoir, comme Jupiter, une action effective sur les inclinaisons; cet élément devient très capricieux, contrairement à ce qui se passe pour les constantes précédentes, relatives à l'anneau lui-même; dans le troisième groupe, par exemple, on observe un saut brusque à l'origine, et, toujours comme précédemment, la seule condensation nette qui se puisse observer existe pour les plus fortes inclinaisons et les plus fortes constantes.

Les Tableaux fournis devront être principalement consultés, en ce qui concerne l'action de Mars, lorsqu'un autre élément, ou une indication théorique, auront indiqué à l'avance la direction de la recherche. Ainsi, dans les longitudes des nœuds, le second groupe nous offre un important minimum tout de suite après le début; de plus, il sera bon de s'attacher aux régions, dans les divers groupes, où nous trouvons, pour la première fois, des distributions régulières fort curieuses.

Au contraire, dans les longitudes périhélies, le deuxième et le troisième groupes offrent des variations brusques et très étendues : mais nous laissons à chacun le soin d'interpréter la succession des densités, ainsi de même que pour celle des quantités $\varpi - \Omega$.

Quelle peut être l'influence du périhélie de Mars? C'est une question qui resterait à élucider, et nous nous bornerons à voir si celui de Jupiter peut encore avoir une action aussi lointaine. Naturellement, il sera des plus utiles d'avoir une autre indication pour consulter ces listes, et il faudra toujours les étudier par comparaison aux précédentes; mais, en attendant, les principales singularités s'observent dans le quatrième groupe pour la longitude du nœud, dans le premier pour la longitude périhélie, et dans les deux premiers pour la différence $\varpi - \Omega$.

COMPARAISON DES COINCIDENCES.

Ainsi, en premier lieu, si, parmi les éléments géométriques des orbites planétaires, on veut étudier les coïncidences d'un élément déterminé, nous avons

vu qu'il fallait définir : d'une part, la loi de répartition de cet élément dans l'anneau, c'est-à-dire une certaine fonction φ de cet élément qui soit propre à en figurer la distribution et dont on ne saurait en rien présumer la forme; d'autre part, le calcul peut devenir assez rapidement illusoire si l'on introduit des puissances élevées de la variable. Cependant, avec des précautions, nous avons pu choisir différentes fonctions; nous avons montré que la représentation est satisfaisante, et les résultats obtenus furent assez concordants pour être utilement comparés aux nombres expérimentaux : ces derniers sont très sensiblement supérieurs aux espérances mathématiques qui résultent du choix des différentes fonctions φ, ce qui revient à dire qu'il paraît exister une raison cosmogonique qui prédispose à des coïncidences d'éléments dans l'anneau des astéroïdes, fait important au point de vue de l'hypothèse d'Olbers.

En second lieu, en dehors de ces données statiques, nous avons vu l'intérêt qu'il pourrait y avoir à chercher l'influence de Jupiter dans la constitution de l'anneau, à étudier par conséquent quelque élément d'ordre dynamique : ceci nous a conduit à calculer les constantes de Tisserand pour les petites planètes, quantités dont la distribution et les coïncidences méritent d'être examinées en détail, suivant le résumé que nous venons d'indiquer, car elles nous sont une nouvelle transition continue entre les astéroïdes et les comètes, et viennent confirmer la notion d'origine ou d'actions perturbatrices dirigeantes de même nature pour tous ces astres.

Puis, si Jupiter joue un rôle prépondérant dans le système solaire, nous parvenons à la compréhension de deux actions assez importantes encore : celle de Mars, de préférence sur le bord qui lui est voisin, et celle de l'anneau sur lui-même, par les perturbations considérables qui peuvent affecter une petite planète circulant dans une atmosphère de corpuscules, et susceptible de passer très près de quelques-uns d'entre eux. Ainsi nous fûmes fatalement conduits à la considération d'une masse perturbatrice située à une distance quelconque du Soleil, soit au calcul de divers groupes de constantes dont l'examen minutieux ne manque pas d'être instructif.

Nous avons donc été amenés, de la sorte, à dénombrer les coïncidences en donnant à l'écart possible, ε, des valeurs variées; et nous avons choisi des valeurs très différentes, l'amplitude de l'intervalle pouvant aller de un à plusieurs milliers, pour apprécier de plus près la distribution des coïncidences. Il est inutile d'insister ici sur cette étude en ce qui concerne les éléments qui définissent géométriquement l'orbite : nous avons vu que l'excentricité est beaucoup plus sensible et beaucoup plus capricieuse que le moyen mouvement. Mais la théorie indique déjà que l'espérance mathématique des coïncidences est pro-

portionnelle à la latitude permise, ε, pour les coïncidences d'éléments : en est-il ainsi pratiquement?

Pour cela nous avons utilisé, précisément, tous les groupes de constantes k dont il vient d'être question et, suivant les diverses valeurs de ε, nous obtenons les résultats comparatifs suivants, nombres réduits à un intervalle unitaire, et relatifs aux variations maxima observées dans les différents cas :

e.	$\frac{1}{a}$.	k_1.	k_2.	k_3.	k_4.	k_5.
1 à 1,56	1 à 2,00	1 à 1,68	1 à 1,85	1 à 2,94	1 à 1,29	1 à 1,68

Ainsi nous trouvons, relativement aux k, et particulièrement pour k_3 lors de la région centrale de l'anneau, des amplitudes exceptionnelles dans ces nombres expérimentaux qui devraient être constants. Pour Jupiter et pour Mars, k_4 et k_5, les amplitudes sont égales; et l'attention ne mérite-t-elle pas d'être appelée sur la valeur k_4? pour laquelle les coïncidences varient régulièrement en raison inverse de ε, pour laquelle, par conséquent, l'espérance mathématique devrait être proportionnelle à une puissance de ε inférieure à l'unité.

N'y a-t-il pas là plus qu'il n'en faut pour légitimer ce genre de recherches? Et, en groupant les coïncidences les plus remarquables, en prenant les moyennes, par catégories, des éléments planétaires dans les cas de ces coïncidences, on parvient à des irrégularités et des curiosités, à des singularités en ce qui concerne toutes les quantités capables d'intéresser le mouvement elliptique — mais ce n'est pas ici le lieu d'insister sur ces détails.

Puis nous avons vu l'utilité qu'il peut y avoir, et pour les recherches théoriques, et pour les études statistiques, à rapporter les orbites planétaires au plan de Jupiter, et non à l'écliptique comme on le fait assez arbitrairement : si l'on recherche les coïncidences qui peuvent exister entre les longitudes des nœuds et des périhélies, on les trouve aussi fréquentes dans l'un et l'autre cas sur l'écliptique; le phénomène se modifie d'une manière importante par rapport au plan de l'orbite de Jupiter, et, d'abord, parce que les coïncidences deviennent moins nombreuses que dans le cas précédent, et, surtout, parce que les deux éléments se séparent, les analogies étant sensiblement plus fréquentes pour les périhélies que pour les nœuds, de sorte que Jupiter paraît plutôt laisser subsister celles-ci que celles-là.

Pour rendre tous ces résultats comparables, il faut les rapporter à un même nombre de planètes ou de combinaisons possibles, à une même fraction de la variation totale dont est susceptible l'élément étudié, puis adopter pour nombre

expérimental la moyenne des nombres relatifs aux diverses valeurs de ε. En opérant ainsi, nous allons indiquer le nombre des coïncidences à $\frac{1}{4000}$ près de l'amplitude possible pour l'élément, c'est-à-dire, par exemple, le nombre des coïncidences à $0^\circ,36$ pour les longitudes; on trouve de la sorte :

e.	$\frac{1}{a}$.	Ω.	ϖ.	k_1.	k_2.	k_3.	k_4.	k_5.
243	393	325	368	333	444	856	496	393

Ces variations considérables font encore mieux comprendre la nécessité d'une étude plus détaillée, pour chercher ceux de ces éléments qui, en vertu de causes originelles, sont ou non favorisés, en même temps que pour étudier l'influence des perturbations sur ces singularités. Au reste l'action de l'anneau sur lui-même est très particulièrement mise en évidence et, dès à présent, on peut énoncer que :

Il existe des raisons cosmogoniques prédisposant aux coïncidences d'éléments, que l'on rencontre toujours en plus grand nombre que la théorie ne l'indique.

On peut admettre que l'action de Jupiter tend à diminuer le nombre de ces coïncidences, peut-être par des perturbations séculaires, du moins en ce qui concerne les longitudes des nœuds, et surtout les excentricités.

LUMIÈRE ZODIACALE.

Ainsi l'étude des coïncidences nous a conduit à de curieuses remarques qui trouvent naturellement leur place dans la recherche de l'origine même des petites planètes; et la considération des moyennes des divers éléments pour les groupes analogues les plus remarquables montre, notamment, que les excentricités sont supérieures à la normale : si donc l'on veut admettre l'idée de la formation de notre système par la condensation progressive d'une nébuleuse, on peut en conclure que Jupiter, une fois constitué, a su créer, dans le sein de cette nébuleuse, des marées suffisantes pour arracher une ou plusieurs masses à l'anneau séparé de l'ellipsoïde contracté. Il suffisait alors, pour que des groupes planétaires fussent définitivement ordonnés, que la distance périhélie moyenne fût supérieure au diamètre de la nébuleuse solaire contractée : faute de quoi les planètes en voie de formation eussent été inéluctablement absorbées, tôt ou tard, dans l'atmosphère solaire elle-même.

Mais, de plus, nous voyons surgir à tout instant d'étroites analogies entre les planètes et les comètes : en particulier les distances périhélies sont loin de présenter les curieux effets des distances aphélies; et, ainsi, l'aphélie marque la position où s'exercent les plus fortes perturbations, de sorte que, en ces points, l'effet perturbateur de la commensurabilité sur les astéroïdes peut être rapproché des perturbations causées par les appulses dans le cas des comètes.

Utilisant encore les documents numériques que nous avons fournis, et reprenant la même classification statistique, on peut avantageusement ordonner les petites planètes, non plus par rapport aux axes des orbites, mais par rapport aux distances aphélies : la distribution est alors plus conforme au calcul des probabilités et l'on trouve que les excentricités augmentent assez rapidement avec les distances aphélies, de même aussi pour les inclinaisons, mais un peu moins régulièrement — nouvelle confirmation détournée de la liaison de ces deux éléments.

Il est impossible, maintenant, de ne pas suivre la condensation progressive de la nébuleuse, jusqu'à son aboutissement au Soleil et, alors, de se demander ce que représente actuellement le résidu de la nébulosité primitive. La lumière zodiacale n'en est-elle pas l'ultime manifestation?

Deux origines, en effet, peuvent être proposées pour la lumière zodiacale : l'une d'essence atmosphérique, l'autre cosmique.

Les particularités observées dans la lumière zodiacale ont bientôt conduit à l'opinion, généralement admise aujourd'hui, que ce phénomène est dû à un anneau de météores circulant autour du Soleil, s'étendant au delà de l'orbite terrestre, et dont les particules réfléchissent la lumière solaire. Les faits d'observation à cet égard sont les suivants :

La lumière zodiacale se trouve à peu près exactement dans le plan de l'écliptique; elle a sa plus grande extension, pour les deux hémisphères, vers le mois de janvier, et dans la direction de l'anti-apex du Soleil; et, à ce moment, on observe souvent qu'elle s'étend sans discontinuité de l'horizon Est à l'horizon Ouest; d'autre part, Piazzi Smyth a trouvé que la position de la lumière zodiacale parmi les étoiles est la même à la même saison, qu'elle soit observée dans le sud de l'Afrique ou à Ténériffe, à 62° de là, ou encore en Angleterre, à 56° de latitude nord. Ce fait, et l'orientation que présente la lumière zodiacale dans le plan de l'écliptique, et non dans celui de l'équateur terrestre, semblent suffisants pour rejeter l'opinion, émise par quelques auteurs, que la lumière zodiacale serait un anneau météorique ou nébuleux entourant la Terre.

Enfin, les observations de lumière polarisée ont montré que l'on est en présence d'une matière réfléchissant la lumière solaire. D'après cela, il serait encore

vraisemblable que la lumière zodiacale est due à un anneau elliptique de météores circulant autour du Soleil, ayant son aphélie au delà de l'orbite terrestre, dans la direction de l'anti-apex du Soleil, et son périhélie à l'intérieur de l'orbite terrestre.

D'autre part, on sait qu'une multitude de météores circulent autour du Soleil, tant dans les grands courants périodiques que dans les nombreux courants sporadiques si élégamment étudiés par Denning : on a calculé que, si l'on y comprend les météores télescopiques, 1200 millions au moins de météores tombent journellement dans l'atmosphère terrestre. En outre, les étoiles filantes semblent généralement avoir leur point d'émanation, ou leur aphélie, dans la région de l'anti-apex du Soleil, où la lumière zodiacale possède aussi sa plus grande extension. Cette direction générale des étoiles filantes est démontrée par leur variation semi-annuelle : le nombre des étoiles filantes observées est beaucoup plus grand pendant les 6 derniers mois de l'année que pendant les 6 premiers, vraisemblablement parce que, pendant le second semestre, les vitesses absolues des météores et de la Terre par rapport à l'apex, étant de sens contraire, s'ajoutent, tandis qu'elles sont de même sens et se retranchent pendant le premier semestre. Au reste, cette direction générale des météores a été confirmée, par ailleurs, dans l'étude de 918 radiants catalogués, dont la direction moyenne a pour ascension droite 120°, c'est-à-dire à peu près celle qui correspond au point de la plus grande extension pour la lumière zodiacale.

De cet ensemble il paraît assez logique de conclure que les étoiles filantes, d'une part, la lumière zodiacale, d'autre part, sont dues à un même anneau de météores circulant autour du Soleil et dont les particules, quand elles ne font que réfléchir la lumière solaire, forment la lumière zodiacale, tandis qu'elles constituent les étoiles filantes quand leur passage à travers notre atmosphère les rend incandescentes.

Puis les recherches les plus récentes de Geelmuyden, très intéressantes et très complètes, semblent bien établir aussi que cette apparence lumineuse est non seulement d'origine cosmique, mais qu'elle est encore nettement héliocentrique et dans les rapports les plus étroits avec les comètes à courte période. Une sorte de zone circulaire, complémentaire d'un cône très évasé, s'étend sous un angle de 20° de part et d'autre de l'écliptique, et la densité de la matière intérieure est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa distance au Soleil.

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des lois très délicates qui régiraient algébriquement la répartition et la condensation de ce résidu nébuleux, mais il se confirme ainsi d'une façon curieuse que la lumière zodiacale, matérialisée, peut tomber progressivement sur le Soleil, par un processus analogue à celui

qu'imagine Th. Moreux. Si cette chute est soumise à des alternatives d'intensité, il peut y avoir là une correspondance avec les variations périodiques du Soleil : ce serait peut-être un moyen d'expliquer la rotation particulière du Soleil et son accélération équatoriale, à moins que la réaction première ne soit sur les taches et, par répercussion, sur le magnétisme et la météorologie terrestres.

En effet, les plus récentes recherches de Ellis, de Chree, Cortie, etc., semblent bien mettre en évidence les relations entre les taches solaires et le magnétisme terrestre; et, si celui-ci n'est pas une conséquence directe de celles-là, ces deux importantes manifestations paraissent du moins être, toutes deux, les résultantes d'un troisième phénomène directeur. Est-ce donc aux chutes météoriques qu'il faut encore faire appel?

Il y a peut-être mieux encore, avec le mécanisme d'Edw. W. Maunder : l'action en question doit être localisée en certaines surfaces restreintes de l'enveloppe du Soleil; elle ne saurait être générale à l'ensemble de la surface de l'astre, car c'est précisément au retour de certains méridiens au centre du disque que nous avons le retour des perturbations. Puis le mode même de transmission de cette influence solaire à la Terre doit s'effectuer le long de lignes définies : cette transmission ne paraît donc pas être de la nature de la radiation, égale dans tous les sens, ainsi qu'il en est pour la lumière et la chaleur.

Autant de problèmes très hauts et très captivants qui viennent élargir le champ des spéculations astronomiques.

Mais laissons un instant de côté la troublante discussion de l'hétérogénéité de cet immense amas nébuleux, et des zones de condensation particulières, des amas qui pourraient correspondre aux petites planètes, aux comètes, aux étoiles filantes et aux bolides, à la lumière zodiacale, à la couronne solaire. Il y a plus encore : on peut, avec Bompas, chercher si la lumière zodiacale et la couronne solaire ne font pas toutes deux partie d'un même anneau météorique, tandis que les étoiles filantes ne seraient toujours que les corpuscules particuliers de cette masse, dont la traversée de notre atmosphère produirait la luminosité. Dans ce cas, les filaments incandescents de la couronne solaire trouveraient leur origine dans les parties de cette grande circulation météorique qui sont les plus voisines du Soleil, et un simple effet de perspective leur donnerait les apparences si caractéristiques qui furent observées pendant les éclipses; et nous voici revenus, par une tout autre voie, aux relations probables de W.-J.-S. Lockyer entre les protubérances solaires et la couronne.

On peut aller plus loin.

L'activité solaire, comme nous nous venons de le voir, est en relation étroite avec l'anneau des astéroïdes, et c'est l'étude seule d'un ensemble cosmique très

vaste qui pourra nous renseigner avec précision, et sur les petites planètes, et sur la constitution du Soleil, en passant par les comètes et la lumière zodiacale. Quelle place va donc prendre, dans un tel système, l'aurore boréale, cette dernière singularité?

Pour le savoir, il faut tout d'abord se rapporter à une étude détaillée du Catalogue des 12000 aurores de Sophus Tromholt, analysé notamment par Bellamy; puis, considérer avec soin les résultats des expéditions dans les régions polaires, comme ceux des 1100 aurores observées par J. Sykora dans l'hiver 1899-1900 lors de l'expédition russo-suédoise chargée de la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. Le problème est délicat en ce qui concerne les documents précis, les renseignements photographiques par exemple : car la lumière est toujours inférieure à celle de la couronne solaire ou de la Lune en quadrature, et comme les aurores ont des formes multiples, à changements très rapides, on ne peut photographier que celles qui sont à peu près immobiles; en revanche, la pose nécessaire permet d'obtenir des traînées d'étoiles et, avec une base de triangulation suffisante, on peut considérer que sera résolu, demain, le problème de la hauteur des aurores boréales — comme le fut celui des nuages atmosphériques élevés.

Mais c'est surtout la photographie spectrale qui va fournir de curieuses indications, malgré les difficultés qu'elle comporte par les grandes variations de température nuisant à la définition des raies : le spectre de l'aurore ne ressemble à aucun des spectres connus, et ce phénomène rappelle l'illumination d'un gaz raréfié, dans un tube sans électrodes, sous l'influence d'une induction électromagnétique. Tout, au reste, confirme une relation *certaine* entre l'apparition des aurores et l'activité solaire.

En résumé :

Le problème de l'anneau des astéroïdes, d'apparence simple, s'est développé par la force des choses et il nous est aujourd'hui impossible de le séparer d'un ensemble très général : une auréole, une vaste zone cosmique sensiblement centrée sur le Soleil, comporte une série de manifestations et de singularités dépendant de près ou de loin les unes des autres, les petites planètes, les comètes, les étoiles filantes et les bolides, l'aurore boréale, la lumière zodiacale, la couronne et les filaments incandescents, les protubérances — et leurs répercussions terrestres.

CONDENSATION DE LA NÉBULEUSE.

En dehors des vagues hypothèses sur la condensation progressive d'une nébuleuse primitive, le mécanisme même de cette condensation est resté assez

mystérieux, depuis un siècle, encore que des analystes distingués se soient préoccupés de la solution d'une question aussi fondamentale. Supposons, cependant, qu'un sphéroïde décrivant une orbite autour du Soleil présente toujours la même face à une étoile : si cette masse est recouverte par un liquide, il se manifestera une marée annuelle qui, avec le temps, pourra obliger le sphéroïde à tourner sur son axe en présentant toujours la même face au Soleil.

Et si nous admettons, en outre, que ce sphéroïde soit animé d'une rotation initiale autour de son petit axe, et que cet axe se trouve précisément dans le plan de l'orbite, il y aura alors deux rotations indépendantes autour de deux axes perpendiculaires : conditions mécaniques qui sont sensiblement réalisées dans le cas de la planète Uranus. Comme on peut le constater sur le gyroscope, il doit en résulter une tendance du petit axe à sortir du plan de l'orbite, de façon que le plan de l'équateur de la planète se rapproche du plan de l'orbite, la rotation et la révolution se produisant dans le même sens.

Or, d'après l'hypothèse de Laplace, lorsque les anneaux se détachent de la nébuleuse pour former les planètes, celles-ci devraient tourner dans le sens rétrograde; tandis que, par suite de la marée que nous venons de signaler, le plan de la rotation a pour effet de se déplacer progressivement : primitivement parallèle au plan des anneaux, il lui devient ensuite perpendiculaire et, enfin, parallèle de nouveau mais avec une rotation directe cette fois. Telle est la modification graduelle que Pickering constate, au moins dans les orbites des satellites des quatre grosses planètes.

En ce qui concerne la formation des petites planètes elles-mêmes, les recherches ont été jusqu'ici moins fructueuses encore : la multiplicité des documents complique le problème, et les nombreux cas particuliers restent inaccessibles. Si l'on veut, en effet, expliquer les singularités, on s'écarte malheureusement de la contexture générale, et si l'on s'attache uniquement à cette dernière, il reste trop d'irrégularités, sans que l'on puisse savoir si elles sont, effectivement, des cas isolés ou si, au contraire, elles correspondent à une raison cosmogonique. Le colonel du Ligondès a tenté de reprendre cette question par la même voie de statistique, l'axe étant pris pour argument, avec les densités et hachures correspondantes aux lacunes.

Dans l'hypothèse de la génération des petites planètes par rupture d'anneaux provenant de l'atmosphère solaire, les orbites les plus excentriques devraient être les plus voisines de la planète troublante : affirmation à peu près opposée aux résultats d'observation. Au contraire, d'après la théorie suivant laquelle les astéroïdes se seraient formés au sein même de la nébuleuse solaire, on peut fort bien admettre que la plupart des agglomérations constituées au début, et

par conséquent dans un voisinage assez proche de Jupiter, ont vu leurs orbites s'excentrer au point de venir s'incorporer, finalement, avec la grosse planète : les comètes de la famille de Jupiter seraient alors, simplement, le résidu qui put échapper à cette absorption.

Sans oser préciser, comme Kirkwood, certains points très particuliers, du Ligondès tente l'explication générale du mécanisme de cette seconde hypothèse : les planètes proviennent de condensations opérées à l'intérieur d'une surface de révolution comprise entre deux cônes, opposés par le sommet, et ayant pour axe commun la perpendiculaire au plan de symétrie de la nébuleuse solaire, équateur du Soleil, sensiblement. On peut alors admettre que chaque centre de condensation a englobé les matériaux situés autour de lui, dans un espace sphérique; ces globes de condensation seraient donc comme les tores engendrés par des cercles, tangents entre eux, inscrits dans l'angle du cône. Les distances des centres de condensation au centre même de la nébuleuse (Soleil) varient suivant une progression géométrique.

La comparaison avec les grosses planètes n'est pas mauvaise, mais de graves objections se présentent bientôt. Tout d'abord, au lieu d'avoir un angle comme section méridienne, une étude plus approfondie vous oblige à infléchir légèrement les deux droites pour les faire rapprocher du plan équatorial : la méridienne ressemble alors à deux pointes d'épingles opposées par leurs sommets; le problème se modifie déjà légèrement, tout en conservant ses analogies si étroites et si curieuses avec la théorie de la lumière zodiacale, et l'on est conduit à adopter, avec Th. Grégull, le chiffre de 50 environ, comme distance moyenne au Soleil (47 seulement suivant E. Lau) de la planète transneptunienne, si elle existe. La loi de Titius s'écarte donc de la réalité dans les régions éloignées du Soleil : elle a donné 38,8 au lieu de 30,0 pour Neptune; 77,2 au lieu de 50 (ou 47) pour la suivante; 154 au lieu de 72 (?), suivant E. Lau, pour la deuxième planète qui suivrait Neptune.

Et, en étudiant le mouvement d'Uranus, Hans-E. Lau a trouvé des inégalités qui, selon lui, peuvent faire présumer l'existence de deux planètes transneptuniennes. Tenant compte de 1400 observations méridiennes de Neptune, réparties sur un intervalle de 49 ans, il reste encore de grosses incertitudes en ce qui concerne ces astres inconnus, notamment pour leurs masses, et leurs excentricités supposées négligeables en première approximation : leurs distances moyennes au Soleil seraient d'environ 47 et 72. Si ces calculs mêmes sont exacts, l'arc décrit par Neptune depuis sa découverte est bien faible et ne permet aucun contrôle, aucune rectification des éléments — en un mot il n'y a plus qu'à découvrir ces deux corps hypothétiques.

Puis il s'en faut que nous soyions renseignés avec précision sur le mécanisme exact de la condensation : tout revient à dire que les lignes centrales de ces tores sont des points de réunion pour toute la matière du tore, et tel ne nous paraît pas devoir être le centre final de condensation. Au reste, réunie suivant un tore qui tend à se réduire à sa ligne centrale, toujours homogène, la matière se présentera sous forme d'anneaux successifs comme dans la théorie de Laplace, et la difficulté n'est qu'ajournée : quand, pourquoi, et comment, se brisera cet anneau pour constituer une masse planétaire unique?

Enfin, et pour en finir, voici venir une critique très importante, peut-être capitale. Pourquoi s'en tenir toujours à la vérification des distances moyennes, au contrôle de la loi de Titius? N'existe-t-il pas tant d'autres éléments essentiels, distincts du grand axe? et dont on ne se préoccupe pas dans les théories cosmogoniques. En bonne place, à cet égard, il faut placer la masse, si étrangement répartie dans le système solaire ; et puisque, suivant un procédé analogue à celui de See, on peut avoir une idée assez précise sur les densités des planètes, il sera relativement facile d'établir le mécanisme des masses pour le comparer avec la théorie — c'est là un point capital à élucider aujourd'hui.

ORIGINE DES PETITES PLANÈTES.

La loi de Titius, nous l'avons vu, présente un intérêt historique considérable : vérifiée *a posteriori* lors de la découverte de la planète Uranus, elle va encore se trouver confirmée quand Piazzi et Olbers aperçurent Cérès et Pallas; elle représente à peu près la distance de Neptune ; elle peut être généralisée, étendue à d'autres systèmes à satellites; et, dans l'ignorance où nous sommes des principes, elle conserve, malgré tout, une saveur de vérité et de mysticisme. L'hypothèse d'Olbers vient ensuite charmer l'esprit par sa simplicité : de plus, elle est féconde. Aprement combattue, elle est soutenue par des efforts vigoureux; et, à travers actions et réactions, légèrement modifiée peut-être, elle satisfait encore aujourd'hui bien des esprits compétents.

Puis surgissent les lacunes, les instabilités; l'anneau s'enrichit de jour en jour, les documents abondent : la théorie, la comparaison avec toutes les autres manifestations du système solaire, suggèrent la discussion de nouveaux éléments; les éclats, les dimensions, les masses, attirent l'attention et il devient de plus en plus difficile de représenter les aspects multiples sous lesquels se présente cet amas, d'élucider toutes les difficultés qu'il soulève.

Les recherches relatives à la formation de l'anneau des astéroïdes comportent

des difficultés considérables dans la statistique; d'abord, on se trouve en présence d'un nombre très élevé d'éléments à discuter, puis la théorie vous indique encore l'introduction de certaines combinaisons de ces quantités. En outre, il est manifeste que la régularité primitive du système est loin d'avoir été respectée et que, notamment, les plans des orbites n'ont pas conservé leur coïncidence première avec le plan d'équateur de la nébuleuse : c'est pourquoi nous avions été déjà conduits à rapporter les orbites des petites planètes, non à l'écliptique, mais au plan de Jupiter, et nous verrons ailleurs qu'il y aurait peut-être même de légers bénéfices à adopter le plan de maximum des aires, ou plan invariable du système, qui représente très probablement aujourd'hui l'ancien plan équatorial de la nébuleuse. Il faut alors recourir à la détermination de ce plan, telle qu'elle fut faite par Stockwell, plan qui ne présente d'ailleurs que de très faibles écarts avec celui de l'orbite de Jupiter.

Au temps de Laplace, quelques astéroïdes, seuls, étaient connus, et constituaient pour ainsi dire une singularité dans le système solaire; aussi bien, leurs masses sont si petites qu'il n'y avait pas lieu d'y attacher autrement d'importance et Laplace n'eut à s'en préoccuper, après coup, qu'à l'état d'instabilité temporaire dans la formation successive des planètes. L'hypothèse si élégante de Laplace sur l'origine du système solaire devait préoccuper bien des savants, et la cosmogonie dut d'importants travaux à Kirkwood, G. Darwin, Trowbridge, Roche, etc.; cependant, dans ces dernières années, Faye crut devoir soumettre le système de Laplace à d'importantes critiques, pour lui faire supporter de profondes modifications, mais, d'autre part, dans un Ouvrage très précieux sur ces questions, C. Wolf s'est efforcé de montrer qu'il n'y avait là aucune objection irréfutable : en fait, en effet, les hypothèses de Laplace peuvent être conservées dans leurs grandes lignes, elles sont très simples et figurent très clairement la genèse des mondes.

L'hypothèse nébulaire fut très récemment encore combattue par Holmes, mais des savants comme Seabroke, Maunder, Crommelin, Lynn, se montrent partisans de la conserver. Malheureusement, la cosmogonie n'est enseignée nulle part en France; on peut même dire plus : elle est à peine effleurée comme sujet accessoire de recherches; elle n'est pas très bien considérée, pour ainsi dire, et cela pour des raisons très curieuses et fort regrettables — qu'il serait trop long d'énumérer ici.

Quoi qu'il en soit, on peut aujourd'hui considérer les petites planètes comme constituant la pierre de touche et le nœud de toute hypothèse sur la formation de notre système; leur nombre s'est considérablement accru, leurs orbites offrent des différences caractéristiques, comme pour servir de lien intermédiaire

entre les grosses planètes et les comètes, et leur situation même est rendue critique, près de Jupiter, tant au point de vue de leur formation qu'à celui de l'étude analytique des perturbations.

Cependant Kirkwood allait bientôt signaler des lacunes dans l'anneau des petites planètes, vers les régions de commensurabilité avec le moyen mouvement de Jupiter, et l'on peut concevoir que les molécules abandonnées dans le voisinage des lacunes, si leurs orbites sont assez excentriques, aient disparu par le fait de leur absorption dans l'atmosphère de la nébuleuse solaire en voie de condensation. L'étude théorique des lacunes n'est pas sans soulever les plus grandes difficultés au point de vue de la stabilité des trajectoires, et l'on est conduit à rechercher si la formation des planètes, toutes choses égales d'ailleurs, n'a pas été, sinon impossible, du moins relativement très difficile dans la région de commensurabilité, et à examiner quel put être l'effet de Jupiter sur un système de molécules représentant les matériaux constitutifs des astéroïdes, molécules abandonnées par la nébuleuse dans des orbites à très peu près circulaires, surtout vers les points en conjonction avec Jupiter, où des marées considérables doivent se produire.

Ces lacunes, à vrai dire, diminuent de jour en jour; les découvertes récentes font connaître des planètes de plus en plus petites, qui se rapprochent des régions critiques, montrant, par leur faible masse elle-même, qu'il y avait là une instabilité dans la condensation nébulaire. En tous cas, le phénomène des marées dans la nébuleuse a été pressenti par Kirkwood, et personne aujourd'hui ne paraît douter de l'influence de Jupiter sur cet anneau d'astéroïdes, et pour sa formation, et, par les perturbations, pour avoir singulièrement compliqué sa contexture présente.

Nous-mêmes, au point de vue statistique, avons étudié avec soin les données si complexes de cet anneau, en reprenant aussi l'examen détaillé des lacunes; enfin, en rapportant les orbites au plan même de l'orbite de Jupiter, nous nous sommes efforcés de voir si les singularités, coïncidences, moyennes, ne devenaient pas plus frappantes : il en est résulté une série d'observations générales et précieuses, mais sans loi formelle. R. du Ligondès s'est appliqué aux mêmes études, insistant sur les coups de hache qui correspondraient aux lacunes, pour mettre encore en évidence l'influence de Jupiter : les comètes, alors, seraient les résidus de la matière dont les premiers matériaux auraient été absorbés par Jupiter.

De Freycinet attire à nouveau l'attention sur ces problèmes en y consacrant deux longues Notes à l'Académie; au reste il ignore, ou veut ignorer, les immenses efforts suscités par ces questions, et cherche à infirmer la théorie de

Laplace, bien qu'il semble révoquer en doute l'influence de Jupiter sur la génération des planètes télescopiques et sur les alternances de leur répartition autour du Soleil. Le grand intervalle de 350 millions de kilomètres où se rencontrent les astéroïdes permettrait presque déjà d'écarter l'hypothèse de leur formation par la rupture d'un ou de plusieurs anneaux, d'autant plus qu'aux distances mêmes où il paraît y avoir un peu de condensation, la densité de la matière est encore bien trop faible pour avoir constitué un anneau continu. De plus, on voit difficilement, surtout en négligeant tellement Jupiter, comment un anneau circulaire à peu près plat permettra une telle dispersion d'inclinaisons et d'excentricités. Si la génération des petites planètes provenait de la rupture d'anneaux issus de l'atmosphère solaire, les groupements de fortes excentricités seraient les plus voisins de la planète troublante, et c'est à peu près le contraire que l'on observe.

D'ailleurs, de Freycinet rapporte toutes les orbites à l'équateur solaire actuel : c'est là un plan qui a bien varié depuis l'origine, et les inclinaisons présentes des astéroïdes n'auront qu'une valeur relative. Enfin, il considère tantôt trois subdivisions, tantôt cinq, tantôt huit anneaux : pourquoi? Si l'on néglige les relations de commensurabilité, le nombre des anneaux est absolument arbitraire; mais alors pourquoi prendre toujours comme limites de ces anneaux, sans aucune raison, les zones mêmes de ces relations de commensurabilité? On voit qu'il reste bien des difficultés, bien des aléas, malgré les coïncidences extraordinaires que trouve l'auteur entre une théorie approchée et les moyennes, et, puisque les pages des *Comptes rendus* lui sont largement ouvertes, il serait à souhaiter qu'il y donnât ses calculs plus détaillés encore, avec les changements d'orbites qui pourraient être fort utiles à d'autres. En tout cas, de Freycinet a remis en évidence la relation entre les grandes inclinaisons et les fortes excentricités, bien souvent utilisée depuis Tisserand, et qui paraît inhérente à toutes les hypothèses cosmogoniques imaginées jusqu'ici.

Dans ces conditions, il est nécessaire d'adopter l'idée de Laplace sur la condensation progressive d'une nébuleuse, telle du moins qu'elle est complétée par les travaux de Roche, Kirkwood, G. Darwin, etc.; et tant de causes perturbatrices interviennent, comme le frottement, l'action de Jupiter, l'action de l'anneau sur ses propres particules, qu'il ne faut guère songer à rencontrer des coïncidences absolues entre la théorie et la statistique expérimentale, mais qu'il convient de se borner à ce que les vérifications soient qualitatives beaucoup plus souvent que quantitatives. Au reste, quand nous parlons de l'action de l'anneau sur lui-même, il ne s'agit pas seulement d'une action d'ensemble, mais bien aussi surtout de ce fait que certaines planètes peuvent passer extrêmement près

les unes des autres, moins du centième de la distance de la Terre à la Lune — et que, dans ce cas, des perturbations considérables, malgré la faiblesse des masses, peuvent engendrer des irrégularités dans les moyennes des éléments.

Ainsi, après la formation de Jupiter, la nébuleuse continue de se condenser; mais bientôt elle devait abandonner des astéroïdes pour lesquels, à l'aphélie, l'action de Jupiter est presque égale au quart de l'attraction solaire : en de semblables circonstances on peut admettre que cette planète géante allait produire des marées considérables dans la nébuleuse solaire. Pour cette sorte de vague équatoriale, la force centrifuge était maximum à la crête, l'action de Jupiter s'accrut à chaque conjonction en présence d'une relation de commensurabilité entre les moyens mouvements, et devait finir par entraîner la séparation d'une masse planétaire. De la sorte la nébuleuse s'écrétait, pour ainsi dire, comme une vague qui moutonne temporairement en poursuivant son chemin, et se condensait encore jusqu'au voisinage d'une nouvelle relation de commensurabilité.

Toutes les petites planètes n'auraient donc pas une origine commune : à chaque relation de commensurabilité correspondrait un groupe d'astéroïdes, de sorte que, si l'on veut subdiviser l'anneau en ayant égard aux relations des divers ordres, il le faut séparer en 3, 6, 9, ... parties. Sans doute, alors, il pourrait s'agir, à l'origine, non d'anneaux concentriques au Soleil, mais d'amas comme dans le cas des étoiles filantes; et, si les matériaux constitutifs des astéroïdes sont inégalement distribués sur l'équateur, il en ressortirait bien, selon Trowbridge, après la séparation, un changement dans la direction de l'axe de rotation de l'ellipsoïde solaire. Ceci permettrait de supposer que chacun des groupes de planètes est incliné par rapport au précédent, mais il faut dire aussi que les masses détachées sont trop faibles pour déplacer bien sensiblement l'axe de la nébuleuse, et que ce n'est pas là l'unique raison de la variété des inclinaisons.

Cependant, si nous calculons l'invariant de Tisserand pour les petites planètes, nous trouvons un grand nombre de coïncidences et, cela, d'autant plus, relativement, que nous exigeons une coïncidence plus précise : cette fréquence croissante des coïncidences tend à mettre en évidence l'influence de Jupiter. Mais nous avons encore calculé cet invariant avec quatre distances autres que l'axe de Jupiter, et nous avons vu les enseignements que l'on peut tirer de la comparaison des résultats. Il y a plus : si l'on se laisse guider par les groupes naturels qui se produisent dans les coïncidences, on constate que les distances aphélies moyennes sont légèrement inférieures aux distances 3,28; 2,50; 3,70; 2,82, etc. qui fourniraient une relation de commensurabilité avec le moyen mouvement de Jupiter; de cette façon, le mécanisme que nous avons développé

après Kirkwood serait valable d'autant mieux que, réciproquement, c'est surtout dans ces régions pour les distances aphélies que les coïncidences de l'invariant sont très notables.

Ainsi, pour les petites planètes, l'effet perturbateur de la commensurabilité ferait le pendant des perturbations causées par les appulses sur le mouvement des comètes et, dans les deux cas, la distance aphélie indique la position où s'exercent les fortes perturbations. Les matériaux constitutifs des astéroïdes, molécules abandonnées par la nébuleuse, se détachent vers les points en conjonction avec Jupiter pour circuler sur des orbites peu excentriques, d'autant plus que l'atmosphère nébulaire n'est pas nettement limitée et qu'elle est destinée à absorber de nouveau toutes les particules dont les trajectoires seraient trop peu circulaires.

Il paraît donc utile de revenir à des idées analogues à celles qu'émettait G. Darwin sur les marées avec frottement : les particules se détachent, circulent encore avec frottement dans une atmosphère solaire très diluée, leur grand axe et leur paramètre diminuent graduellement assez peu, et c'est pourquoi nous les trouvons aujourd'hui légèrement en deçà, en moyenne, des relations de commensurabilité -- sans préjudice du rôle actuel de ces relations au point de vue des perturbations, tout frottement sensible étant disparu. Enfin, il nous faut revenir au criterium de Tisserand pour en dire encore un mot : si l'on suppose aux petites planètes une excentricité et une inclinaison constantes, égales aux moyennes de ces éléments, on trouve que les écarts présentés par les constantes sont minima lorsque la masse perturbatrice adoptée est précisément au centre de condensation de l'anneau, vers la distance 2,9 du Soleil; relativement, c'est également dans ce cas que le phénomène des coïncidences est le plus fréquent. Ce fait est intéressant, car les coïncidences d'éléments paraissent dépendre de raisons cosmogoniques : elles sont beaucoup plus fréquentes que la théorie ne peut le laisser prévoir, tandis que l'action séculaire de Jupiter tend précisément à les diminuer. Or, dans la pratique, et quelle que soit la distance employée, on trouve que les écarts entre les valeurs extrêmes sont toujours très supérieurs à ceux qui correspondraient à une inclinaison et à une excentricité constantes — si l'on n'oublie pas, bien entendu, l'influence que peuvent avoir ces éléments sur les valeurs extrêmes de la distribution.

Alors, inversement, on peut se proposer de former des groupes distincts de planètes, et de chercher à les rapporter à un plan tel qu'une masse perturbatrice qui y circulerait, à une distance convenable, donnerait presque la même valeur aux invariants du groupe correspondant. En tenant compte également des rotations séculaires des orbites sous l'influence de Jupiter, nous espérons

pouvoir montrer ainsi l'idée que l'on peut se faire des plans successifs de formations planétaires, et de la variation du plan équatorial de la nébuleuse.

*
* *

Toutes les recherches que nous avons faites sur les petites planètes sont reliées entre elles dans leurs grandes lignes. Mais, en même temps, elles sont en communion étroite avec les tentatives les plus variées de chercheurs isolés; et c'est en approfondissant les travaux épars sur cette importante question que nous avons amassé progressivement les documents très nombreux qui nous ont paru indispensables à l'histoire complète de l'anneau des astéroïdes durant le XIX^e^ siècle. C'est cette histoire que nous publierons ultérieurement.

Pour l'instant il nous a paru qu'une nomenclature de singularités serait ici un peu illusoire, et paraîtrait bien disparate à qui n'est pas familiarisé avec ces problèmes. D'autre part, pour pouvoir relier intimement toutes les questions de statistique, il faut exposer l'état de ce problème cosmogonique et, en l'exposant, il devient indispensable d'attribuer nettement à chacun la part qui lui revient dans le progrès final : c'est ce que nous avons tenté de faire, bien que nos propres recherches aient ici, naturellement, une place exagérée. Nous avons réduit au strict minimum les indications théoriques, car elles feront l'objet d'un Mémoire analogue à celui-ci; et, pour ne pas alourdir la lecture, nous avons renvoyé à un index final les œuvres bibliographiques essentielles. Par ce procédé, nos propres études seront situées mieux en place, et l'on appréciera plus justement leur utilité et leur idée directrice; puis nous nous excusons à l'avance du manque de clarté qui a pu subsister dans cette rédaction, et qui tient précisément à la variété et aux liens multiples de toutes ces questions.

Par ces quelques indications succinctes, et déjà trop longues, nous avons voulu mettre en relief la complexité que présente le problème cosmique qui résulte de l'anneau des petites planètes, la variété des épreuves qu'il comporte — afin d'aboutir, somme toute, à l'intuition d'un mécanisme général, mais encore bien imprécis, pour la condensation de la nébuleuse dans la région des astéroïdes telle que nous l'avons rapidement ébauchée. Nous avons voulu montrer l'ampleur de la question des petites planètes, qui ne fut jamais encore exposée dans son ensemble, et si nous avons suscité bien plus de points d'interrogation que nous n'en avons levés, nous serons du moins heureux, peut-être, d'appeler l'attention des astronomes sur quelques problèmes assez mystérieux.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

RELATIVE AUX PETITES PLANÈTES.

Alexander (Stephen). — *Astronomical Journal,* edited by B.-A. Gould, nos 19-20.

Andoyer. — *Bulletin astronomique,* t. XII, p. 79; 1895.

— Sur un cas particulier à l'étude des cas de commensurabilité approchés dans le problème des trois corps : *Bulletin astronomique,* t. XIX, p. 440; 1902.

D'Arrest. — Ueber das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter; 1854.

Backlund. — Zur Entwicklung der Störungsfunktion : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 7e série, t. XXXII, n° 4.

— Ueber das Auftreten von hyperelementären Gliedern in der Störungstheorie : *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* t. VI, 2 notes.

— Ueber die kleinen Divisoren bei den elementären Gliedern in der Theorie der Planetenbewegungen : *Astronomische Nachrichten,* n° 2920.

— Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten : *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* 7e série, t. XXXVIII; 1892.

— Même titre que ci-dessus : *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft,* 28e année, fasc. I-IV; Leipzig, 1893.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXII, p. 1103; 1896.

— Ueber die Integration der Differentialgleichung des Radius Vector einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 8e série, t. VI, n° 4; 1897.

— Ueber die Bewegung kleiner Planeten des Hecuba-Typus : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 8e série, t. VI, n° 10; 1897.

— Sur la question des lacunes des petites planètes : *Bulletin astronomique,* t. XVII, p. 81; 1900.

Barnard (E.-E.). — Dimensions des petites planètes : *L'Astronomie,* t. XIII, p. 306; 1894.

— Détermination des diamètres des quatre premières petites planètes et remarques sur leurs éclats : *Monthly Notices,* t. LVI; 1896.

— Sur les dimensions des planètes et des satellites : *Astronomische Nachrichten,* Band CLVII, n° 3760, p. 251; 1902.

Bauschinger (J.). — Ueber die Bearbeitung der kleinen Planeten : *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft,* 31. Jahrgang, IV. Heft, p. 284; 1896.

— Tabellen zur Geschichte und Statistik der kleinen Planeten : *Veröffentlichungen der K. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin,* n° 16; 1901.

Bellamy. — Analyse du Catalogue de Sophus Tromholt : *The Observatory*, vol. XXVI, 1903.

Berberich (A.). — *Astronomische Nachrichten*, n° 2827 ; 1888.

Berkiewicz. — Berechnung der allgemeinen durch die Planeten Mars, Jupiter und Saturn bewirkten Störungen der Juno bei ausschliesslicher Berücksichtigung der ersten Grade der Störungsmassen... : *Astronomische Nachrichten*, t. LXXII, p. 1-32, 145-176, 289-315 ; 1868.

Boccardi (J.). — Guide du calculateur, 2 vol. ; Paris, 1902.

Bohlin (Karl). — Zur Frage der Convergenz der Reihenentwicklungen in der Störungstheorie : *Astronomische Nachrichten*, n° 2882.

— Formeln und Tafeln zur Gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen Benachbarter Planeten : *Nova acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3e série, t. XVII ; 1896.

— *Astronomische Nachrichten*, nos 1189, 1379, 1597, 3294, 3396, 3605, 3620, 3621.

— Ueber eine neue Annhäerung's Methode in der Störungstheorie : *Bihang till K. Svenska Vet-Akad. Handlingar*, Band XIV, Aft. I, n° 5 ; Stockholm, 1888.

— Sur le développement des perturbations planétaires ; Stockholm, 1902.

Bompas. — *British astronomical Association ;* 1901.

Boquet (F.). — *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX.

Bourget. — Sur le calcul des divers termes du développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées : *Annales de l'Observatoire de Paris* (*Mémoires*, t. VII).

Brendel (M.). — Om Anwändningen af den absoluta Störingstheorie... : *Annales de l'Observatoire de Stockholm*, t. IV, n° 3 ; 1889.

— Ueber die Anwendung der Gylden'schen absoluten Störungstheorie... ; Berlin-Göttingen, 1890.

— Sur les lacunes du système des petites planètes et sur un procédé d'intégration dans le problème des trois corps : *Astronomische Nachrichten ;* 1896.

— Theorie der kleinen Planeten : *Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Band I, n° 2 ; Berlin, 1898.

Callandreau (O.). — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXV, p. 386.

— Analyse des travaux concernant les perturbations des petites planètes : *Bulletin astronomique*, t. XV, p. 275 ; 1898.

— Revue des publications astronomiques : *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 470 ; 1890.

— Sur les lacunes dans la zone des petites planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 751 ; 1894, t. CXX, p. 585 ; 1895.

— *Annales de l'Observatoire de Paris* (*Mémoires*, t. XXII ; 1896).

— Sur des intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations... : *Bulletin astronomique*, t. X, p. 265 et 313 ; 1893.

— Revue des publications astronomiques : *Bulletin astronomique,* t. XIII, p. 445; 1896.

— *Annales de l'Observatoire de Paris* (*Mémoires,* t. XX).

— Communication faite au Congrès de l'Astronomische Gesellschaft; août 1902.

— Statistique des petites planètes. Distribution des éléments en prenant la distance aphélie comme argument : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXXVI, p. 937; 20 avril 1903.

Cauchy. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XX; 1845.

Charlier (C.-V.-L.). — *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft,* t. XXV.

— Sur les points singuliers des irrégularités séculaires des petites planètes : *Bulletin astronomique,* t. XVII, p. 209; 1900.

— Quelques cas de libration dans le système des planètes : *Meddelanden fran Lunds astronomiska Observatorium,* n° 12; 1900.

Chessin (A.). — *Astronomical Journal,* t. XIV, n^{os} 14 et 20.

Corrigan (S.-J.). — Quelques effets de la collision de deux astéroïdes : *Astronomy and Astro-Physics,* p. 207 et 304; 1893.

Cornu (A.). — Découverte des petites planètes par la photographie : *Bulletin de la Société astronomique,* t. VII, p. 137; 1893.

Damoiseau. — Additions à la *Connaissance des Temps;* 1846.

Doberck. — *Astronomische Nachrichten,* n° 2262, t. XCV, p. 81; 1879.

Faye. — Sur l'origine du Monde; Paris, 1885.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 18 juin 1888.

Féraud (A.). — *Annales de l'Observatoire de Bordeaux,* t. VIII et X.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 21 mai et 22 octobre 1900.

Flammarion (C.). — Études et lectures sur l'Astronomie, t. VII, p. 157; 1877.

— Astronomie populaire, p. 510; 1879.

Freycinet (de). — Sur les planètes télescopiques : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 30 avril et 19 novembre 1900.

Galle (A.). — *Astronomische Nachrichten;* 1902.

Gauss. — Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis Solem ambientium. (Il existe une traduction française, par E. Dubois; Paris, 1864.)

— Determinatio attractionis... : *Œuvres complètes,* t. III.

Geelmuyden (H.). — La lumière zodiacale : *Bulletin astronomique,* t. XIX, p. 446; 1902.

Glauser. — Les plans des orbites des petites planètes : *Astronomische Nachrichten,* 1887.

Gould. — Untersuchungen über die gegenseitige Lage der Bahnen der zwischen Mars und Jupiter sich bewegenden Planeten; 1848.

Grégory (R.-A.). — *Nature,* 23 avril 1892.

Gylden. — Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welsche zur Darstel-

lung der Coordinaten der Planeten angewendet werden : *Acta mathematica*, t. IX.

— Traité des orbites absolues des huit planètes principales.

— Undersökningar af theorien för himlakropparnes röselser : *Bih. t. k. Svenska Akad. Handlingar*, Band VI, nos 8 et 9; Band VII, no 2; 1881 et 1882.

— *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft*, t. XXV.

— Hülfstafeln : *Publication der astronomischen Gesellschaft*, t. XXI.

— *Astronomische Nachrichten*, nos 1370.

Hall (A.). — Le problème des trois corps : *Astronomical Journal*, 1902.

— *Astronomical Journal*, no 377.

Hansen. — Disquisitiones circa theoriam perturbationum quæ motum corporum cœlestium afficiunt : *Astronomische Nachrichten*, nos 166-168; 1829.

— Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns; Berlin, 1831.

— Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung : Erster Theil; Gotha, 1845. Traduction française par Mauvais; Paris, 1845.

— Anseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten : *Mémoires de la Société royale des Sciences de Saxe*, t. V, VI, VII.

Happel (H.). — Untersuchungen über die Convergenz der beim Problem der drei Körper auftretenden Reihenentwickelungen : *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1900.

Hartmann. — *Astronomische Nachrichten*, 1900.

Harzer (P.). — *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft*, 20e année, fasc. IV; Leipzig, 1885.

— Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper : *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 7e série, t. XXXIV; 1886.

— *Astronomische Nachrichten*, 1896.

Hill. — *Astronomical Papers*, t. IV.

Holetschek (J.). — Ueber die Richtungen der grossen Axen der Kometen Bahnen; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne*, t. XCIV.

— Ueber die Unsichtbarkeit von Kometen für den Aequator und für höhere geographischen Breiten : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne*, t. CIX; 1900.

— Sur l'invisibilité des comètes sous l'équateur et sous les latitudes élevées; *Astronomische Nachrichten*, 1901.

Holmes (E.). — The aspects of the nebular hypothesis : *Journal of the British astronomical Association*, Vol. XIV, no 4.

Hornstein. — Zur Kenntniss der Asteroïden-Systems : *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Akademie der Wissenschaften*, t. LXXXIV, p. 7; Vienne, 1881.

HOUEL. — Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant la forme adoptée par Hansen, dans la théorie des petites planètes; Paris, 1875.

IDMAN (A). — Remarques sur un théorème de Le Verrier concernant les perturbations des petites planètes : *Meddelanden fran Lunds astronomiska Observatorium,* n° 14, 1900.

IWANOW. — Hilfstafeln zur Berechnung von angenäherten Bahnen kleinen Planeten von Hécuba-Typus : *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* t. X, n° 1; 1899.

— Hilfstafeln zur Berechnung von angenäherten Bahnen kleinen Planeten von Hecuba und Sybilla-Typus und Ableitung der Glieder dritter Ordnung im Ausdrücke : *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XIII, n° 3; 1900.

JAHN. — Ueber die gegenseitige Lage der 24 kleinen zuerst entdeckten Planeten : *Astronomische Nachrichten,* t. XXXVIII, p. 81; 1854.

KIRKWOOD (D.). — *The astronomical Journal,* by B.-A. Gould, t. VI, p. 126 et 144; 1861.

— *Sidereal Messenger*, t. I, n° 4, p. 129; 1882. *The asteroïds,* 1888.

— Relation des comètes à courte période avec la zone d'astéroïdes : *The sidereal Messenger,* 1888.

— Sur l'inclinaison des astéroïdes : *The sidereal Messenger,* 1889.

— Sur la ressemblance de certaines orbites dans la zone des astéroïdes : *Société astronomique du Pacifique*, Publication n° 7; 1890.

— Sur l'origine des lacunes dans la zone des astéroïdes : *The sidereal Messenger,* 1891.

— Sur les relations qui existent entre les moyens mouvements de Jupiter, de Saturne et de certaines petites planètes : *Astronomy and Astro-physics,* p. 302; 1893.

KLEIBER (J.). — Sur la distribution des nœuds des orbites planétaires ou cométaires : *Astronomische Nachrichten,* 1886.

KLINKERFUES. — Ueber Construction von Störungtafeln für die kleinen Planeten : *Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* Band II; 1864.

KURT LAVES. — L'orbite de la petite planète 334; Chicago, 1904.

LAGRANGE. — *Connaissance des Temps,* 1814.

LAISANT. — *Nouvelles Annales de Mathématiques,* p. 407; 1877.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 6 avril 1903.

LAPLACE. — Mécanique céleste.

LEMKE (H.). — Ueber die Mars und Jupiter Störungen der kleinen Planeten von Hébé-Typus : *Inaugural Dissertation,* Berlin, 1897.

LESPIAULT. — Monographie des astéroïdes : *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. II, p. 169; 1861.

LESSER. — *Astronomische Nachrichten,* n^{os} 1189, 1241, 1379.

LEVEAU. — *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. XV.

Le Verrier. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, p. 797; 1853.

— *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. I.

Ligondès (du). — Formation du système du monde; 1897.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 avril 1900.

— Sur les planètes télescopiques : *Bulletin de la Société astronomique de France*, t. XV, p. 358; 1901.

— Au sujet des planètes transneptuniennes : *Bulletin de la Société astronomique de France*, t. XVII, p. 121; 1903.

Lockyer (W.-J.-S.). — Sur une relation probable entre les protubérances solaires et la couronne : *Monthly Notices of the Royal astronomical Society*, vol. LXIII, 1903.

Lombroso. — L'homme de génie. Paris, Reinwald, 1903.

Ludendorff. — Die Jupiter Störungen der kleinen Planeten von Hecuba-Typus : *Inaugural Dissertation;* Berlin, 1897.

Maillet (Ed.). — *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. X, p. 252; 1903.

Masal. — Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten : *Kongl. Svenska Vetenskapsakademien Handlingar*, Band XXIII, n° 7; Stockholm, 1889.

— Entwicklung der Reihen der Gylden'schen Störungstheorie bis zu Gliedern zweiter Ordnung; Munich; 1892.

— Tables de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-a^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}.$$

Astronomiska Iakttagelser och Undersökningar anstälda pa Stockholms Observatorium, Band. V, Heft 5.

— *Annales de l'Observatoire de Stockholm*, t. V.

Mascart (J.). — Contribution à l'étude des planètes télescopiques : *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XXIII, A; 1897.

— Sur la probabilité d'une coïncidence entre les éléments de deux planètes : *Bulletin astronomique*, août 1898.

— Constitution de l'anneau des petites planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2 janvier 1899.

— Application du criterium de Tisserand aux petites planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 10 avril 1899.

— Les orbites des petites planètes rapportées à l'orbite de Jupiter : *Bulletin astronomique*, juin 1899.

— L'anneau des petites planètes. Étude de coïncidences : *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XXIII, F; 1899.

— Constantes de Tisserand pour les petites planètes : *Bulletin astronomique,* 1899.
— Coïncidences entre les éléments des planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 20 janvier 1902.
— Application de l'intégrale de Jacobi aux petites planètes : *Annales de l'Observatoire de Paris* (*Mémoires,* t. XXV; 1902).
— Perturbation du grand axe des petites planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 17 février 1902.
— Situation des petites planètes dans la condensation de la nébuleuse de Laplace : *Bulletin de la Société des Gens de sciences,* février 1902.
— Contribution à l'origine des petites planètes : *Bulletin de la Société astronomique de France,* 1902.
— Perturbations indépendantes de l'excentricité : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 15 décembre 1902 et 16 février 1903.
— Perturbations qui ne dépendent que de l'élongation : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 2 mars 1903.
— Calcul des perturbations indépendantes de l'excentricité dans les orbites des planètes : *Bulletin astronomique,* avril 1903.
— Perturbations séculaires : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 4 mai 1903.
— Perturbations séculaires du premier degré par rapport à l'excentricité : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 18 mai 1903.
— Perturbations séculaires d'importance secondaire : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 6 juillet 1903.
— Résidu des perturbations séculaires : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 3 août 1903.
Maunder (Edw.). — L'origine solaire des perturbations du magnétisme terrestre : *Bulletin astronomique,* t. XXII, p. 109; 1905.
Mauvais. — Sur les intersections mutuelles des plans des orbites des petites planètes : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 157; 1846.
Monck (W.-H.-S.). — Familles d'astéroïdes : *The sidereal Messenger,* 1888.
Moreux (Th.). — Le problème solaire; 1900.
Newcomb (S.). — *Astronomische Nachrichten*, n° 2617.
— A new case in celestial mechanics : *Astronomical Papers.*
— *Astronomical Papers,* t. III, 1884.
— Sur la limitation de la période pendant laquelle on pourra faire usage des perturbations spéciales dans la théorie des planètes : *Astronomische Nachrichten,* 1900;
— Sur les variations séculaires et les relations mutuelles des orbites des astéroïdes. Cambridge, 1860.
— *Astronomische Nachrichten*, n° 1382; 1862.
— Comparaison of the actual and probable distribution in longitudes of the nodes and

perihelia of 105 small planets : *Astronomische Nachrichten*, t. LXXIII, n° 1746, p. 287; 1869.

— Sur la distribution des moyens mouvements de petites planètes : *Astronomical Journal;* 1900.

Niesten (L.). — Les dimensions des petites planètes : *Ciel et Terre;* 1890.

Olbers. — *Berliner astronomisches Jahrbuch*, p. 108; 1805.

Olsson. — Ueber die absolute Bahn der Planeten 13 Egerie; Stockholm, 1893.

Parkhurst (H.-M.). — Observations photométriques d'astéroïdes : *Astronomical Journal,* 1890.

— *Astronomy and Astro-physics,* n° 116; 1894.

— *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College,* t. XXIX; 1894.

Parmentier. — *L'Astronomie,* t. II, p. 213, 1883; t. V, p. 143, 1886; t. VII, p. 226, 1888.

— *Bulletin de la Société astronomique,* t. II, p. 79, 1888; t. IV, p. 22, 1890; t. VII, p. 42, 1893; t. VIII, p. 11, 1894; t. IX, p. 77, 1895; t. X, p. 283, 1896; t. XVI, p. 126, 1902.

Peirce. — *Astronomical Journal,* t. I.

Perrotin. — Thèse de Doctorat, Paris, 1879, et *Annales de l'Observatoire de Toulouse,* t. I, p. B.80.

Piazzi (Histoire de). — *Bulletin de la Société astronomique,* septembre 1901.

Picart (Luc). — Sur la désagrégation des essaims météoriques : Thèse de Doctorat, Paris, 1892, et *Annales de l'Observatoire de Bordeaux,* t. V.

Pickering (W.-H.). — Explication de l'inclinaison des axes des planètes : *Astronomical Journal,* 1902.

Plana. — Nota sulla probabile formazione della moltitudine di Asteroïdi chi circolano intorno al Sole tra Marte e Giove : *Il Nuovo Cimento,* t. III, p. 148, 1856, et t. XIII, p. 146, 1861.

Poincaré (H.) — Calcul des probabilités; Paris, 1896.

— Les solutions périodiques et les planètes du type Hécube : *Bulletin astronomique,* t. XIX, p. 178; 1902.

— Sur les planètes du type Hécube : *Bulletin astronomique,* t. XIX, p. 289; 1902.

Pontécoulant (de). — Théorie analytique du système du monde.

Puiseux (V.). — *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. VII.

Radau. — *Bulletin astronomique*, t. XVI, p. 247; 1899.

Ravené (G.). — *Astronomische Nachrichten;* 1896.

Roger (E.). — Sur la distribution des planètes entre Mars et Jupiter : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXIX, p. 895 et 943; 1895.

Schmidt (R.). — Sur un moyen de développer notre connaissance des astéroïdes : *Société astronomique du Pacifique,* Publication n° 10; 1891.

Schulhof. — *Berliner astronomisches Jahrbuch,* 1874, 1875, 1876, 1878, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1894, 1895, 1896.

— Sur les grandes perturbations des comètes périodiques : *Bulletin astronomique,* t. VIII, p. 147, 191, 225; 1891.

See (T.-J.). — *Astronomische Nachrichten,* n° 3743; 1901.

— Recherches sur le diamètre de Mars : *Astronomische Nachrichten;* 1902.

— Recherches sur le diamètre de Jupiter : *Astronomische Nachrichten;* 1902.

Seeliger. — Zur Photometrie zerstreut reflectirender Subtanzen; 1888.

— Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiacallicht; 1901.

Simonin. — Sur l'orbite de 108 Hécube : Thèse de Doctorat; Paris, 1897.

Stockwell. — Memoir on the secular variations of the elements, of the orbits, of the light principal planets : *Smithsonian contributions to knowledge,* t. XVIII, Washington, 1873.

Stromgren (E.). — *Astronomische Nachrichten,* n° 3916.

— Ueber die gegenseitigen Störungen zweier einander nahekommenden kleinen Planeten : *Astronomische Nachrichten,* Band CLXV, n° 3938.

Sundmann (K.-F.). — Ueber die Störungen der kleinen Planeten; Helsingfors, 1901.

Svedstrup (A.). — Les petites planètes situées entre Mars et Jupiter : *Astronomische Nachrichten,* n° 2741; 1886.

Sykora (J.). — Sur la photographie du spectre de l'aurore boréale : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 8e série, vol. XIV, n° 5; 1903.

— Observations directes et photographiques des aurores boréales : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 8e série, vol. XIV, n° 5; 1903.

Tisserand. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XCIII, p. 325; 1885.

— Sur un cas remarquable du problème des perturbations : *Bulletin astronomique,* t. III, p. 425; 1886.

— *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CIV, p. 259; 1887.

— Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le problème solaire : *Bulletin astronomique,* t. IV, p. 183; 1887.

— Sur la théorie de la capture des comètes périodiques : *Bulletin astronomique,* t. VI, p. 241, 289; 1889.

— *Annuaire du Bureau des Longitudes;* 1891.

— Sur le calcul des perturbations des planètes et des comètes produites par la résistance de l'éther : *Bulletin astronomique,* t. X; 1893.

— Sur la libration des petites planètes : *Bulletin astronomique,* t. XII, p. 489; 1895.

— Mécanique céleste, t. IV, p. 417; 1896.

— Leçons sur la détermination des orbites, recueillies et publiées par J. Perchot; Paris, 1899.

— Développement de la fonction perturbatrice... : *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. XV.

Trowbridge. — *Silliman's Journal,* 2e série, t. XXXVIII.

Venturi. — Methodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli planeti; Milan, 1882.

Wolf (C.). — Les hypothèses cosmogoniques; Paris, 1886.

Wolf (Max.). — Sur les termes élémentaires dans l'expression du rayon vecteur : *Annales de l'Observatoire de Stockholm,* t. IV.

— *Astronomische Nachrichten;* 1900.

Zeipel (V.). — *Astronomische Nachrichten,* nos 3620-3621.

Zenger (Ch.-V.). — *Comptes rendus de la Société royale des Sciences de Bohême;* 1878.

— Die Meteorologie der Sonne und ihrer System; Vienne, 1885.

— *The Observatory;* 1887-1888.

— *Bulletin de la Société astronomique,* t. IX, p. 243; 1895.

Revue des publications astronomiques : *Bulletin astronomique,* t. III, p. 348-416; 1886.

Bulletin astronomique, t. XIX, p. 433; 1902.

Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, nos 1 et 3; 1902.

Ciel et Terre, t. XXIV, p. 219; 1903.

Notices sur les progrès de l'Astronomie : *Monthly Notices,* 1895 et 1896.

Perturbations périodiques des petites planètes : *Revue générale des Sciences pures et appliquées;* 28 février 1902.

La formation des petites planètes : *Revue générale des Sciences pures et appliquées;* 30 août 1901.

Planètes transneptuniennes : *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* 13e année, no 2, p. 59; 1902.

Systèmes cométaires résultant de la désagrégation des comètes : *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* 12e année, no 17, p. 779; 1901.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Introduction	1
Éclats moyens	2
Diamètres apparents	5
Masse totale de l'anneau	8
Constitution de l'anneau	9
Les moyens mouvements	14
Les lacunes	16
Explication des lacunes	19
Recherches théoriques	22
Cas particuliers	25
Excentricités et inclinaisons	36
Instabilités	38
Longitudes des nœuds et des périhélies	40
Rotation des orbites	42
Répartition de la masse de l'anneau	44
Orbites rapportées à Jupiter	46
Excentricités et inclinaisons	47
Nœuds et périhélies	49
Orbites sur l'équateur solaire	51
Éléments analogues	53
Probabilité des coïncidences	56
Applications numériques	60
Relation avec les comètes	62
Criterium de Tisserand	66
Perturbations périodiques	69
Généralités sur les constantes	72
Étude de k_1	76
Étude de k_2	77
Étude de k_3	79
Étude de k_4	81
Étude de k_5	82
Comparaison des coïncidences	83
Lumière zodiacale	86
Condensation de la nébuleuse	90
Origine des petites planètes	93
Bibliographie sommaire	101